

DOI:10.3969/j.issn.1672-1144.2022.02.003

基于 Harris 衰减函数的岩石单调加载本构模型

许志雄¹, 范 炜²

(1. 福州职业技术学院 建筑工程系, 福建 福州 350108;

2. 福建江夏学院 工程学院, 福建 福州 350108)

摘要:以变形模量为对象,研究岩石单调加载的本构模型。首先根据单调加载过程中变形模量随着应变增大而减小的衰减现象,引入 Harris 函数来表征变形模量衰减规律,从而建立岩石单调加载本构模型;然后根据极值理论,结合试验曲线特征值,确定模型参数;最后引用相关文献试验数据,利用新提出的单调加载本构模型对试验数据进行参数计算,获得岩石本构模型理论值,该理论值与试验结果吻合度较高,验证了模型的适用性。对模型参数分析发现,模型参数 a 主要反映了岩石的宏观强度, a 值越大,岩石峰值强度越低。参数 b 与岩石强度关系不大,但体现了岩石的延脆性, b 值越大,脆性越强,反之延性越明显。

关键词:单调加载;本构模型;变形模量;Harris 函数

中图分类号: TU452

文献标识码: A

文章编号: 1672-1144(2022)02-0022-05

A Monotone Loading Constitutive Model of Rock Based on the Harris Attenuation Function

XU Zhixiong¹, FAN Wei²

(1. Department of Architectural Engineering, Fuzhou Polytechnic College, Fuzhou, Fujian 350108, China;

2. College of Engineering, Fujian Jiangxia University, Fuzhou, Fujian 350108, China)

Abstract: In this paper, the constitutive model of rock under monotonic loading is analyzed based on deformation modulus. Firstly, according to the attenuation phenomenon that the deformation modulus decreases with the increase of strain in the process of monotone loading, the Harris function is introduced to characterize the attenuation law of deformation modulus, and the constitutive model of rock under monotone loading is established. Then, according to the extreme value theory and the characteristic values of the test curve, the model parameters are determined. Finally, the theoretical values of the rock constitutive model are obtained by calculating the parameters of the experimental data using the proposed monotone loading constitutive model. The theoretical values are in good agreement with the experimental results, which verifies the applicability of the model. The model parameter a mainly reflects the macro strength of rock, and the higher the value of a , the lower the peak strength of rock. Parameter b has little relation with rock strength, but reflects the brittleness of rock. The larger the value of b is, the stronger the brittleness is, and the more obvious the ductility is.

Keywords: monotonic loading; constitutive model; secant modulus; Harris function

随着我国经济与科学技术的发展,向地下要空间则是未来发展的重要方向之一^[1],这势必涉及到大量的岩石工程。岩石变形是影响岩石工程安全的

重要因素,因此掌握岩石的力学本构模型对更好利用地下空间具有重要意义。Krajcinovic 等^[2]在 Lemaitre^[3]提出的等效应变假说基础上,结合了连续

收稿日期:2021-10-27

修稿日期:2021-11-30

基金项目:福建省自然科学基金项目(2020J01941);校级课题“海洋环境下镍铁渣粉水泥土的强度及抗渗性能研究”(FZYRCQD201902)

作者简介:许志雄(1971—),男,教授级高级工程师,主要从事岩石力学与基础工程方面的工作。E-mail:1069067985@qq.com

通讯作者:范 炜(1971—),女,副教授,博士,主要从事结构工程与高性能混凝土方面的工作。E-mail:fw408@163.com

损伤和统计强度理论,建立了损伤模型,后人在此基础上不断完善改进,提出了多种统计损伤模型。高玮等^[4]将破裂岩石视作多个小立方体,并假定各个立方体的强度服从 Weibull 分布,从而提出一种破裂岩体的本构模型。曹瑞琅等^[5]在岩石微元强度服从 Weibull 分布的基础上,考虑了岩石残余强度并对损伤变量进行了修正,最终建立了考虑岩石峰后残余强度的本构模型。蒋浩鹏等^[6]则将温度考虑进来,得到了高温后岩石统计损伤本构模型。Li 等^[7]和王林峰等^[8]则认为岩石强度服从正态分布,并基于此建立了新的本构模型。然而 Weibull 分布存在尺寸效应,而正态分布则会出现岩石强度和参数为负值的现象,这与实际情况不符。因此,部分学者尝试采用新的函数构建岩石统计损伤模型,其中效果比较理想的是 Harris 函数。黄海峰等^[9]假设岩石微元强度服从 Harris 函数,并对损伤模量进行修正,构建了损伤软化模型。王创业等^[10]和李小峰等^[11]同样认为岩石微元强度服从 Harris 分布,建立的本构模型与试验结果匹配度较好。但上述理论涉及到的岩石微元强度存在不易测量的缺点,而且,部分学者采用拟合法确定模型参数,虽然拟合度较好,但参数物理意义不明,而这势必影响本构模型的应用。大量试验表明,岩石在单调加载过程中,随着应力增大,应变快速增加直至岩石破坏,其对应变形模量表现出逐渐衰减的特征。变形模量作为岩石基本物理量之一,测量简便^[12],如果能够获得变形模量的衰减规律,就可以建立应力与应变之间的关系。因此,本文通过引入 Harris 函数来表征变形模量衰减规律,并通过极限求导的方式获得模型参数。通过与已有试验数据进行对比,验证了新模型的适用性。

1 本构模型分析

1.1 理论模型

图 1 所示为岩石典型单调加载应力应变曲线。

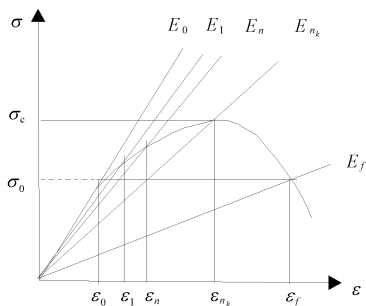


图 1 岩石单调加载应力应变曲线

考虑压密段岩石应力较低,故忽略岩石压密过程。假设在 ε_0 之前岩石处于线弹性段,随后岩石进入弹塑性阶段,随着应力增加,应变大幅增加,应力应变曲线逐渐偏离纵坐标。选取原点作为起点,根据变形模量定义可获得不同应力应变处变形模量如图 1 所示。

若将 ε_0 至 ε_f 段应变进行 N_f 等分,则第 n 段应变为:

$$\varepsilon_n = \varepsilon_0 + n \cdot \frac{\varepsilon_f - \varepsilon_0}{N_f} \quad (1)$$

式中: ε_0 为弹性终点处应变值; ε_n 为第 n 等分处应变值; ε_f 为单调加载破坏处应变值; n 为第 n 等分; N_f 为弹性段终点至破坏点等分总数。在单调加载过程中变形模量从 E_0 逐步衰减到 E_f 后,岩石破坏。已有成果常采用式(2)定义岩石损伤^[13-14]:

$$D_n = 1 - \frac{E_n}{E_0} \quad (2)$$

式中: D_n 为岩石第 n 等分处损伤值; E_n 为第 n 等分处变形模量; E_0 为初始变形模量。

根据公式可知当岩石破坏时,岩石损伤并不等于 1,即岩石不会破坏,这与实际不符。为此,将变形模量进行归一化,如式(3)所示。

$$K_n = \frac{E_n - E_f}{E_0 - E_f} \quad (3)$$

式中: K_n 为变形模量归一化值; E_f 为岩石加载破坏处变形模量; E_0, E_n 意义上。

由此可知,随着单调荷载的增加至岩石破坏,变形模量归一化值则从 1 衰减到 0。若能利用一个函数来表征衰减规律,则可以获得变形模量数值,从而得到应力应变关系。常见衰减函数有线性衰减,指数衰减,高斯衰减以及 Harris 衰减等。显然对于单一线性衰减其衰减速率为恒值,若要满足衰减速率为变量则要构造分段线性函数,过于麻烦;指数衰减是先剧烈衰减然后变缓,难以满足不同类型岩石的变形模量变化规律;高斯衰减速率是先缓慢,然后变快,最后又放缓呈钟形,同样难以满足不同类型岩石破坏,且高斯衰减计算相对繁琐,参数可为任意实数,这与实际情况不符^[15]。反观 Harris 函数,见式(4),仅有 2 个参数且均大于 0,通过变换两个参数的值可以得到不同形状的衰减形式。

$$S(X) = \frac{1}{1 + aX^b} \quad (4)$$

式中: X 为函数自变量; a, b 为大于 0 的常数。

为了建立变形模量与等分段数之间的关系,可

令 $X = n/(N_f - n)$, 则当 $n = 0, S(0) = 1$, 当 $n = N_f$ 时, $S(N_f) = 0$, 从而得到用衰减函数表征归一化变形模量的表达式:

$$\frac{E_n - E_f}{E_0 - E_f} = S\left(\frac{n}{N_f - n}\right) = \frac{1}{1 + a\left(\frac{n}{N_f - n}\right)^b} \quad (5)$$

根据式(5) 可以求得 ε_n 处对应的变形模量为:

$$E_n = E_f + \frac{E_0 - E_f}{1 + a\left(\frac{n}{N_f - n}\right)^b} \quad (6)$$

从而可得:

$$\begin{aligned} \sigma_n = E_n \varepsilon_n &= \left(E_f + \frac{E_0 - E_f}{1 + a\left(\frac{n}{N_f - n}\right)^b}\right) \left(\varepsilon_0 + n \frac{\varepsilon_f - \varepsilon_0}{N_f}\right) \\ &= A \cdot n \cdot S\left(\frac{n}{N_f - n}\right) + B \cdot S\left(\frac{n}{N_f - n}\right) + nC + D \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{式中: } A = (E_0 - E_f) \cdot \frac{\varepsilon_f - \varepsilon_0}{N_f}$$

$$B = (E_0 - E_f) \cdot \varepsilon_0$$

$$C = \frac{\varepsilon_f - \varepsilon_0}{N_f} E_f$$

$$D = E_f \cdot \varepsilon_0$$

1.2 模型参数确定

根据式(7) 可知, 岩石单调加载过程中应力与分段数 n (由应变确定) 存在一一对应关系, 是分段数 n 的函数。假定岩石全应力应变曲线峰值 σ_c 对应分段次数为 n_k , 则该点满足边界条件有:

$$\begin{cases} \sigma_{n_k} = \sigma_c \\ \left. \frac{d\sigma_n}{dn} \right|_{n=n_k} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

式中: σ_c 为峰值应力; n_k 为峰值应力对应的应变分段数根据式(8) 中第一项可得:

$$\sigma_c = A \cdot n_k \cdot S\left(\frac{n_k}{N_f - n_k}\right) + B \cdot S\left(\frac{n_k}{N_f - n_k}\right) + n_k C + D \quad (9)$$

根据式(8) 中第二项可得:

$$\begin{aligned} A \left(1 + a\left(\frac{n_k}{N_f - n_k}\right)^b\right) + C \left(1 + a\left(\frac{n_k}{N_f - n_k}\right)^b\right)^2 - \\ (An_k + B) \frac{N_f}{(N_f - n_k)^2} ab \left(\frac{n_k}{N_f - n_k}\right)^{b-1} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

根据式(9) 和式(10) 可得:

$$S\left(\frac{n_k}{N_f - n_k}\right) = M \quad (11)$$

$$ab \cdot \left(\frac{n_k}{N_f - n_k}\right)^{b-1} = F \quad (12)$$

$$\text{式中: } M = \frac{\sigma_c - n_k C - D}{A \cdot n_k + B}$$

$$F = \left(\frac{A}{M} + \frac{C}{M^2}\right) \frac{(N_f - n_k)^2}{(An_k + B)N_f}$$

通过对式(12) 变换则有:

$$a \cdot \left(\frac{n_k}{N_f - n_k}\right)^b \cdot b \frac{N_f - n_k}{n_k} = F \quad (13)$$

由式(11) 可得:

$$S\left(\frac{n_k}{N_f - n_k}\right) = \frac{1}{1 + a\left(\frac{n_k}{N_f - n_k}\right)^b} = M \quad (14)$$

由此解得:

$$a\left(\frac{n_k}{N_f - n_k}\right)^b = \frac{1 - M}{M} \quad (15)$$

联立式(13) 和式(15) 可得:

$$a = \frac{1 - M}{M\left(\frac{n_k}{N_f - n_k}\right)^b} \quad (16)$$

$$b = \frac{F \cdot M \cdot n_k}{(1 - M)(N_f - n_k)} \quad (17)$$

2 本构模型验证

为验证所建立的岩石本构模型的适用性, 根据文献[16-19] 试验数据进行计算, 得到本构模型参数如表 1 所示, 最终结果如图 2 所示。

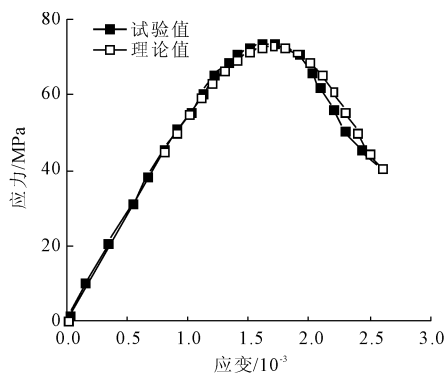
表 1 模型参数值

来源	文献[16]	文献[17]	文献[18]	文献[19]
a	0.490	0.230	0.630	0.710
b	1.270	1.170	0.880	1.770
R^2	0.977	0.945	0.926	0.963

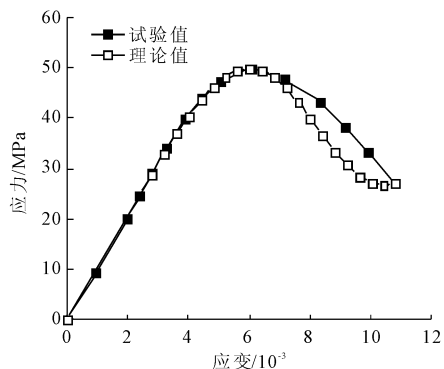
从图 2 可以看到, 本文所提出的本构模型理论与试验值吻合度较高, 尤其在峰前段高度重合, 在峰后段存在一定偏差, 当岩石在峰后段应力快速降低时, 二者吻合度较差, 对于该问题, 需进一步研究。但在岩石工程中, 一般利用的都是岩石峰前段承载能力, 因而本文所建立的模型能够满足工程应用。

3 模型参数分析

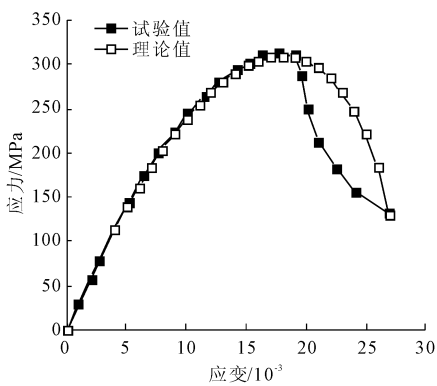
为了进一步讨论模型参数对理论解的影响并分析参数的物理意义, 以文献[15] 为例, 通过改变参数 a 和 b 的值, 来分析模型参数对结果的影响, 结果如图 3 所示。



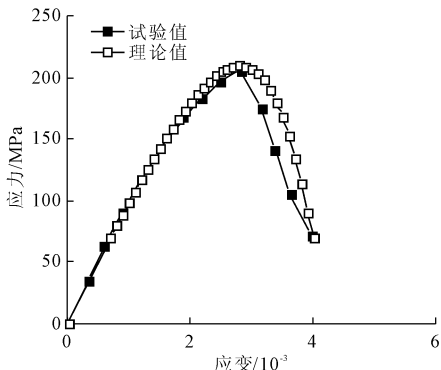
(a) 文献[16]验证结果



(b) 文献[17]验证结果



(c) 文献[18]验证结果

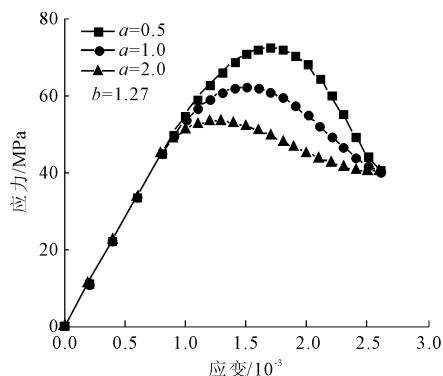


(d) 文献[19]验证结果

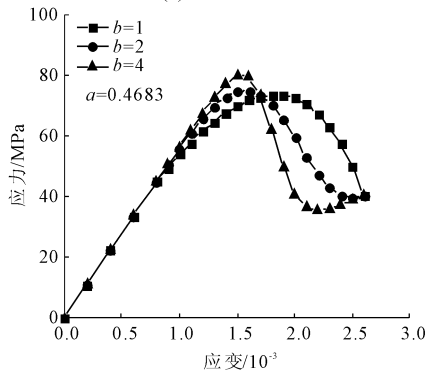
图 2 本构模型验证

从图 3(a)中可以看到当参数 b 保持不变,随着参数 a 的增大,峰值应力出现较为明显的下降,当参数 a 由 0.5 增大至 2.0 时,峰值强度由 72 MPa 逐步

降低至 54 MPa,与参数 a 基本呈线性关系。与此同时,岩石峰值应变也随着参数 a 的增大而减小,而参数 a 的变化对岩石峰后曲线形态没有明显影响,这即表明参数 a 与岩石峰值强度相关。而从图 3(b)则可以看到,当参数 a 保持不变,随着参数 b 的增大,峰值应力和峰值应变均增大,但增大幅度较小。但参数 b 对岩石峰后曲线形态影响较为明显,随着 b 的增大应力应变曲线由较为平缓状转变为陡直状,峰后应力跌落速度加快,表明岩石脆性增强。故经上述分析可知,模型参数 a 主要反映了岩石的宏观强度,而参数 b 则在一程度上体现了岩石的延脆性。



(a) 参数 a 影响规律



(b) 参数 b 影响规律

图 3 模型参数分析

4 结 论

(1) 以变形模量为研究对象,通过分析变形模量在单调加载过程中随着应变增大而衰减的特征,引入 Harris 函数来表征变形模量衰减规律,构建了岩石单调加载本构模型。

(2) 采用极值理论,结合试验曲线特征值,推导了模型参数的计算表达式,模型参数物理意义明确。与前人试验结果对比,验证了本文模型的正确性。

(3) 模型参数分析表明,参数 a 控制岩石强度, a 值越大,岩石峰值强度越低。参数 b 与岩石强度关系不大,主要与岩石延脆性相关, b 值越大,脆性

越强,反之延性越明显。

参考文献:

- [1] 黄永,余廉.城市韧性需求下的地下空间开发[J].中国应急管理,2021(8):58-61.
- [2] Krajcinovic D, Silva M A G. Statistical aspects of the continuous damage theory - Science Direct[J]. International Journal of Solids and Structures, 1982,18(7):551-562.
- [3] Lemaitre J. How to use damage mechanics[J]. Nuclear Engineering and Design, 1984,80(2):233-245.
- [4] 高玮,胡承杰,贺天阳,等.基于统计强度理论的破裂岩体本构模型研究[J].岩土力学,2020,41(7):2179-2188.
- [5] 曹瑞琅,贺少辉,韦京,等.基于残余强度修正的岩石损伤软化统计本构模型研究[J].岩土力学,2013,34(6):1652-1660,1667.
- [6] 蒋浩鹏,姜谔男,杨秀荣.基于 Weibull 分布的高温岩石统计损伤本构模型及其验证[J].岩土力学,2021(7):1-9.
- [7] Li Y W, Jia D, Rui Z H, et al. Evaluation method of rock brittleness based on statistical constitutive relations for rock damage[J]. Journal of Petroleum Science and Engineering, 2017,153:123-132.
- [8] 王林峰,曾韬睿,翁其能.基于统计损伤理论的饱和细粒砂岩本构模型研究[J].材料导报,2019,33(22):3727-3731,3751.
- [9] 黄海峰,巨能攀,李路,等.基于改进 Harris 函数的岩石统计损伤软化模型[J].工程地质学报,2018,26(2):520-527.
- [10] 王创业,王洪麒.基于改进 Harris 函数的砂岩损伤本构模型研究[J].长江科学院院报,2016,33(12):91-93,104.
- [11] 李小峰,王军保.基于改进 Harris 分布的岩石损伤统计本构模型研究[J].地下空间与工程学报,2012,8(4):767-771.
- [12] 李欣慰,姚直书,黄献文,等.循环加卸载下砂岩变形破坏特征与能量演化研究[J].岩土力学,2021,42(6):1693-1704.
- [13] 彭瑞东,谢和平,鞠杨.砂岩拉伸过程中的能量耗散与损伤演化分析[J].岩石力学与工程学报,2007(12):2526-2531.
- [14] Areias P, Reisino J, Camanho P P, et al. Effective 2D and 3D crack propagation with local mesh refinement and the screened poisson equation[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2017,189(2):339-360.
- [15] Zhu Y L, Yu J, Cai Y Y, et al. A novel fatigue damage model of rock considering temperature effects[J]. Advances in Civil Engineering, 2020(5):1-11.
- [16] 秦庆词,李克钢,杨宝威,等.岩石全应力-应变过程关键特征点损伤特征分析[J].岩土力学,2018,39(S2):14-24.
- [17] 康亚明,刘长武,贾延,等.岩石的统计损伤本构模型及临界损伤度研究[J].四川大学学报(工程科学版),2009,41(4):42-47.
- [18] 张嘉威,章杨松,李晓昭.考虑渐进性破坏的岩石损伤本构模型研究[J].地下空间与工程学报,2015,11(6):1528-1532.
- [19] 温稻,唐辉明,刘佑荣,等.影响因子修正的新型岩石损伤统计本构模型[J].中国矿业大学学报,2016,45(1):141-149.

(上接第 21 页)

- [6] 叶树人.深圳地下水对地下建(构)筑物浮力作用参数取值的分析[J].四川建筑,2004,24(1):59-60.
- [7] 周朋飞.城市复杂环境下地下水浮力作用机理试验研究[D].北京:中国地质大学(北京),2006.
- [8] 熊欢.地下结构抗浮设计中浮力的研究[D].长沙:中南大学,2013.
- [9] 张乾,宋林辉,梅国雄.黏土地基中的基础浮力模型试验[J].工程勘察,2011,39(9):37-41.
- [10] 梅国雄,宋林辉,宰金珉.地下水浮力折减试验研究[J].岩土工程学报,2009,31(9):1476-1480.
- [11] 潘增志.兰州地区某砂岩地基渗透性及抗浮水位研究[D].兰州:兰州大学,2016.
- [12] 王露.西北地区特殊红砂岩地层地铁车站抗浮研究[D].兰州:兰州理工大学,2019.
- [13] 宋林辉,王宇豪,付磊,等.软黏土中地下结构浮力测试试验与分析[J].岩土力学,2018,39(2):753-758.
- [14] 刘博怀.地基土性质对地下水浮力影响试验研究[D].兰州:兰州大学,2018.
- [15] 张中杰,陈加核,曹攀.基于 FLAC3D 的软土内地地下结构杨托力研究[J].中国市政工程,2018(1):76-79,104-105.
- [16] 陆启贤,任志盛,杨济铭,等.黏土中孔压传递规律及水浮力折减的试验研究[J].工业建筑,2019,49(3):126-131.