

DOI:10.3969/j.issn.1672-1144.2021.03.034

天津滨海新区轨道 Z4 线双线 U 型截面简支梁桥的自振特性分析

黄欣¹, 张京京¹, 赵静波¹, 石庆波¹, 冀伟^{1,2}

(1. 中铁十八局集团有限公司, 天津 300222; 2. 兰州交通大学, 甘肃 兰州 730070)

摘要: 为研究双线 U 型截面简支梁桥的竖向弯曲振动频率, 并获得一种简化的计算方法, 以天津滨海新区轨道 Z4 线 30 m 双线 U 型截面简支梁桥为背景, 采用理论分析和数值模拟相结合的方法对其动力性能进行研究。首先推导出考虑剪切和剪滞双重效应下, 主梁和道床板的应变能求解公式, 接着利用能量变分原理求得控制微分方程, 最后运用 Hamilton 原理得到双线 U 型截面简支梁桥的竖向弯曲振动频率计算公式。为了验证所得竖向弯曲振动频率解析解的正确性, 运用 ANSYS 与 MIDAS/Civil 有限元软件对双线 U 型截面简支梁桥进行数值模拟, 求得双线 U 型截面简支梁桥的前三阶竖向弯曲振动频率, 并将有限元结果与所推导的理论计算值进行对比。研究表明: 竖向弯曲振动频率公式的计算结果与有限元结果吻合较好, 精度较高; 竖向弯曲振动频率受宽跨比变化的影响最大, 道床板厚度变化次之, 高跨比变化最小; 且竖向弯曲振动频率随着宽跨比和道床板厚度的增大, 均表现出增大趋势; 随着竖向弯曲振动频率阶数的增高, 其增幅均逐渐减小。

关键词: U 型梁; 竖向弯曲振动频率; 能量变分法; 剪切变形

中图分类号: U441⁺.3

文献标识码: A

文章编号: 1672—1144(2021)03—0221—06

Analysis of Natural Vibration Characteristics of Double Track U-section Simply Supported Girder Bridge on Track Z4 in Binhai New Area of Tianjin

HUANG Xin¹, ZHANG Jingjing¹, ZHAO Jingbo¹, SHI Qingbo¹, JI Wei^{1,2}

(1. China Railway 18th Bureau Group Co., Ltd., Tianjin 300222, China;

2. Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou, Gansu 730070, China)

Abstract: In order to study the pure bending vertical vibration frequency of double track U-section simply supported girder bridge, and obtain a simplified calculation method, the dynamic characteristics of 30 m double track U-section simply supported girder bridge on track Z4 in Binhai New Area of Tianjin was analyzed by combining theoretical analysis with numerical simulation. For the double track U-section simply supported girder bridge, considering the shear deformation and shear lag effect, the strain energy formulas of web and track bed slab were derived respectively. The governing differential equations and boundary conditions were obtained by using the energy variational method. Finally, the pure bending vertical vibration frequency of double track U-section simply supported girder bridge was obtained by using Hamilton principle. In order to verify the correctness of the pure bending vertical vibration frequency, ANSYS and MIDAS/Civil finite element software were used to carry out numerical simulation of the double track U-section simply supported girder bridge. The first three orders of natural frequency of the double track U-section simply supported girder bridge were obtained, and the results were compared with the theoretical calculated value. The results show that the calculated values of the pure bending vertical vibration frequency derived agree well with the finite element values. The ratio of width to span

收稿日期: 2020-12-23

修稿日期: 2021-01-26

基金项目: 天津市科技计划项目 (18ZXGDGX00050)

作者简介: 黄欣 (1976—), 女, 硕士, 正高级工程师, 主要从事地下空间、铁路、桥梁施工技术管理与 BIM 技术研究工作。

E-mail: 292908732@qq.com

(3) 假定所有外荷载关于梁中心轴对称。

(4) 梁体材料只按混凝土考虑,忽略其他材料的影响。

双线 U 型截面简支梁桥横截面计算简图如图 2 所示, b 为道床板长度的 1/4 长度, h_1 为截面的形心至道床板中心的长度, t_b 为道床板厚度, h 为主梁高度, t_f 为主梁厚度, A_b 为道床板面积, A_f 为主梁的面积, A 为截面的总面积。

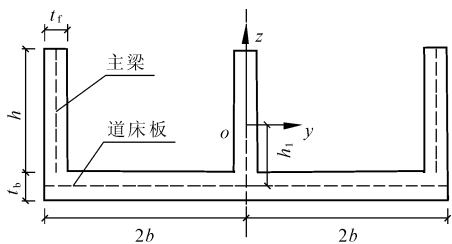


图 2 1/2 U 型截面梁计算简图

研究该桥型的竖向弯曲振动频率时,需引入两个广义位移函数,即竖向位移函数 ω 和纵向位移函数 $v(x, y, t)$:

$$\begin{cases} \omega = \omega(x, t) \\ v(x, y, t) = h_1\varphi(x, t) + \bar{y}u(x, t) \end{cases} \quad (1)$$

式中: $\varphi(x, t)$ 为截面由于纯弯曲引起的转角; $u(x, t)$ 为剪切变形最大差值; t 为时间; \bar{y} 为纵向翘曲位移函数,由下式计算:

$$\bar{y} = \begin{cases} h_1 \left[1 - \left(\frac{y-b}{b} \right)^2 \right] + d & \text{道床板} \\ d & \text{主板} \end{cases} \quad (2)$$

式中: d 表示附加截面轴力位移,由 $\int_A \bar{y} = 0$ 可得:

$$d = -\frac{2A_b h_1}{3A} \quad (3)$$

2.2 控制微分方程的建立

道床板应变能 V_1 表达式为^[22]:

$$V_1 = \frac{1}{2} \int_0^l E_c I_d \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 dx - \int_0^l E_c H_1 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \int_0^l E_c H_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l G_c H_3 u^2 dx \quad (4)$$

式中: E_c, G_c 分别表示混凝土的弹性模量和剪切模量; I_d 表示道床板的惯性矩。 H_1, H_2, H_3 的表达式为:

$$\begin{cases} H_1 = \left(\frac{1}{3}h_1 + \frac{1}{2}d \right) t_b A_b \\ H_2 = A_b \left[(h_1 + d)^2 - \frac{1}{3}h_1(h_1 + d) + \frac{1}{10}h_1^2 \right] \\ H_3 = \frac{2A_b h_1^2}{3b^2} \end{cases} \quad (5)$$

主梁应变能 V_2 表达式为:

$$V_2 = \frac{1}{2} \int_0^l E_c I_f \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l G_c A_f \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - \varphi \right)^2 dx \quad (6)$$

式中: I_f 表示主梁的惯性矩。

双线 U 型截面简支梁桥在自由振动时的动能 T 为:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l m \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right)^2 dx \quad (7)$$

式中: m 表示 U 型简支梁的单位长度质量。

利用 Hamilton 原理可得:

$$\delta \Pi = \delta \int_{t_1}^{t_2} (V_1 + V_2 - T) dt \quad (8)$$

将式(4)、式(6)和式(7)代入式(8)中,运用能量变分法的势能驻值原理可得到截面控制微分方程如式(9)一式(11)所示。

$$m \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} - G_c A_f \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (9)$$

$$E_c H_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G_c A_f \left(\varphi - \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) - E_c I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \quad (10)$$

$$E_c H_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + G_c H_3 u - E_c H_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (11)$$

式中: $I = I_d + I_f$, 是双线 U 型梁截面惯性矩。

对式(9)求偏导可得:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \frac{m}{3G_c A_f} \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \quad (12)$$

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} = \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} - \frac{m}{3G_c A_f} \frac{\partial^4 \omega}{\partial t^2 \partial x^2} \quad (13)$$

$$\frac{\partial^5 \varphi}{\partial x^5} = \frac{\partial^6 \omega}{\partial x^6} - \frac{m}{3G_c A_f} \frac{\partial^6 \omega}{\partial t^2 \partial x^4} \quad (14)$$

对式(10)求偏导得:

$$E_c H_1 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + G_c A_f \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) - E_c I \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} = 0 \quad (15)$$

$$E_c H_1 \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + G_c A_f \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} - \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} \right) - E_c I \frac{\partial^5 \varphi}{\partial x^5} = 0 \quad (16)$$

将式(12)和式(13)代入式(15)可得:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{I}{H_1} \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + \frac{m}{E_c H_1} \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} - \frac{mI}{G_c H_1 A_f} \frac{\partial^4 \omega}{\partial t^2 \partial x^2} \quad (17)$$

将式(13)和式(14)代入式(16)可得:

$$\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} = \frac{I}{H_1} \frac{\partial^6 \omega}{\partial x^6} + \frac{m}{E_c H_1} \frac{\partial^4 \omega}{\partial t^4} - \frac{mI}{G_c H_1 A_f} \frac{\partial^6 \omega}{\partial t^2 \partial x^4} \quad (18)$$

对式(11)求三阶偏导可得:

$$G_c H_3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + E_c H_1 \frac{\partial^5 \varphi}{\partial x^5} - E_c H_2 \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} = 0 \quad (19)$$

将式(14)、式(17)和式(18)代入式(19)可得:

$$\begin{aligned} & (H_1^2 - H_2I)E_c^2G_cA_f \frac{\partial^6 \omega}{\partial x^6} + E_cG_c^2H_3IA_f \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + \\ & E_c^2m(H_2I - H_1^2) \frac{\partial^6 \omega}{\partial t^2 \partial x^4} - E_c(G_cH_3I + H_2G_cA_f)m \frac{\partial^4 \omega}{\partial t^2 \partial x^2} + \\ & G_c^2H_3A_fm \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

为计算式(20),引入自由振动时的竖向位移函数:

$$\omega(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) \sin(\omega_n t + \theta_n) \quad (21)$$

式中: ω_n 为U型梁自由振动时的圆频率; θ_n 为U型梁自由振动时的初始相位角; $W_n(x)$ 为振型函数,可表示为:

$$W_n(x) = \alpha_n \sin(n\pi x/l) \quad (22)$$

式中:常数 α_n ^[23]由初始边界条件决定,本文取 $\alpha_n = 1$ 。

根据式(20)、式(21)和式(22)和伽辽金法可得:

$$\begin{aligned} & \omega_n^2 m \left[\left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 (E_c^2 H_2 I - E_c^2 H_1^2) + G_c^2 H_3 A_f \right] + \\ & \omega_n^2 m \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 (G_c H_3 E_c I + E_c H_2 G_c A_f) + \\ & \left(\frac{n\pi}{l} \right)^6 E_c^2 G_c A_f (H_1^2 - H_2 I) - \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 E_c I G_c^2 A_f H_3 = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

由式(20)可得U型梁自由振动时的表达式:

$$\omega_n = \Theta \cdot M \quad (24)$$

其中:

$$\Theta = \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{E_c I}{m}} \quad (25)$$

$$M = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \frac{E_c (H_2 I - H_1^2)}{G_c H_3 I}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \frac{E_c I}{G_c A_f} + \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \frac{E_c H_2}{G_c H_3} + \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 \frac{E_c^2 (H_2 I - H_1^2)}{G_c^2 H_3 I}}} \quad (26)$$

式中, $n = 1, 2, 3, \dots$; l 为简支梁的跨度。

3 有限元模型

3.1 建立有限元模型

为了更准确的对比分析双线U型截面简支梁桥的竖向弯曲振动频率,采用ANSYS 19.0有限元软件和MIDAS/Civil有限元软件分别建立U型截面梁的三维实体模型。在ANSYS有限元模型中,主梁及道床板均采SOLID45实体单元模拟(见图3),在MIDAS/Civil有限元模型中采用梁单元进行模拟

(见图4)。双线U型截面简支梁桥的支座约束为:梁的一端采用固定铰支座,以约束横向、竖向及纵向三个方向的位移;梁的另一端采用滑动铰支座,以约束横向及竖向两个方向上的位移。

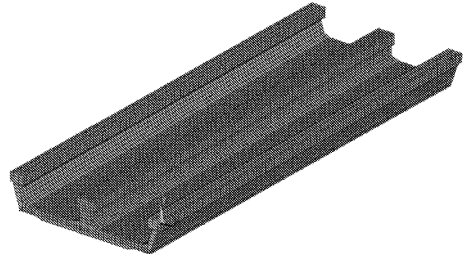


图3 ANSYS有限元模型

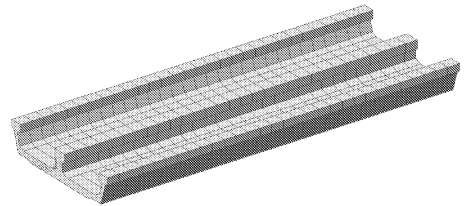


图4 MIDAS/Civil有限元模型

3.2 验证理论解析解

将本文竖向弯曲振动频率公式的计算结果与ANSYS有限元计算结果和MIDAS/Civil有限元计算结果进行分析对比,结果如表1所示。

表1 不同方法下竖向弯曲振动频率比较

计算方法	一阶频率 /Hz	二阶频率 /Hz	三阶频率 /Hz
本文	5.79	21.49	41.59
ANSYS	4.60	19.35	36.26
MIDAS/Civil	4.71	19.48	37.08

从表1可以看出,第一阶理论结果与ANSYS计算结果相对误差为6.56%,与MIDAS/Civil计算结果相对误差为4.32%;第二阶频率的理论解与ANSYS计算结果相对误差为9.17%,与MIDAS/Civil计算结果相对误差为6.23%;第三阶频率的理论解与ANSYS计算结果相对误差为11.13%,与MIDAS/Civil计算结果相对误差为9.43%。本文竖向弯曲振动频率计算公式计算结果与ANSYS有限元值的结果和MIDAS/Civil计算结果均吻合良好,精度较高,且随着阶数的增大,计算误差也在增大,本文理论解析法更适宜求解低阶频率。

4 结构参数分析

4.1 宽跨比

为研究宽跨比对U型简支梁桥竖向弯曲振动

频率的影响程度,其他条件与工程背景保持不变,仅改变计算跨度,分析其竖向弯曲振动频率。跨度分别取30 m、35 m、40 m、45 m、50 m,对应的宽跨比分别为0.322 4、0.276 3、0.241 8、0.214 9、0.193 4,由本文所推导的计算公式得到前三阶竖向弯曲振动频率如图5所示。

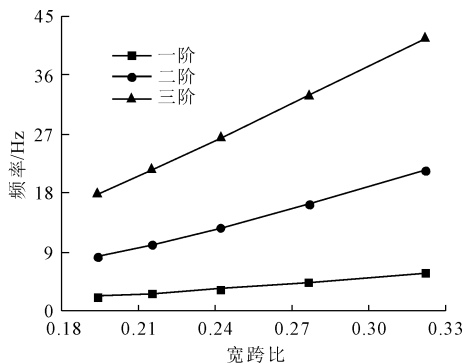


图5 宽跨比对竖向弯曲振动频率的影响

从图5可以看出,宽跨比会对双线U型简支梁桥的竖向弯曲振动频率产生影响,随着宽跨比的不断增大,竖向弯曲振动频率也逐渐增大,第一阶竖向弯曲振动频率最大增幅在35.03%;第二阶竖向弯曲振动频率增幅最高为31.85%;第三阶竖向弯曲振动频率增幅最高为26.62%;且随着阶数的不断升高,竖向弯曲振动频率的增幅在逐渐减小。

4.2 道床板厚度

为了研究混凝土道床板的厚度对双线U型简支梁竖向弯曲振动频率的影响,其他条件与工程背景保持不变,道床板厚度分别取:0.4 m、0.5 m、0.6 m、0.7 m、0.8 m进行对比分析。所求得的前三阶竖向弯曲振动频率的结果见图6所示。

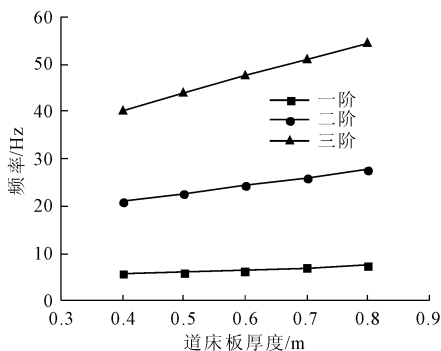


图6 道床板厚度对竖向弯曲振动频率的影响

从图6可以看出,道床板厚度的变化会对双线U型简支梁竖向弯曲振动频率产生影响,随着道床板厚度的不断增大,所求得的竖向弯曲振动频率在不断增加。第一阶竖向弯曲振动频率最大增幅为

6.93%;第二阶竖向弯曲振动频率最大增幅为6.72%;第三阶竖向弯曲振动频率最大增幅为6.58%。且随着阶数的不断升高,竖向弯曲振动频率的增幅在不断减小。

4.3 高跨比

为研究高跨比对双线U型截面简支梁桥竖向弯曲振动频率影响程度,其他条件与工程背景保持不变,梁截面的高度分别取:2.1 m、2.2 m、2.3 m、2.4 m、2.5 m,其对应的高跨比分别为:0.070 0、0.073 3、0.076 7、0.080 0、0.083 3,由本文所推导的计算公式得到前三阶竖向弯曲振动频率如图7所示。

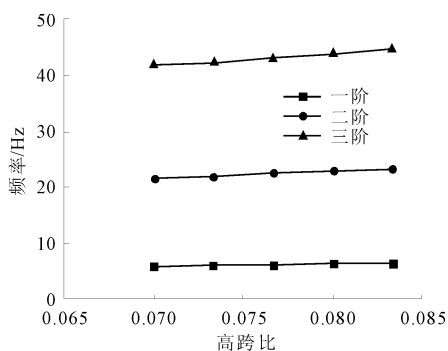


图7 高跨比对竖向弯曲振动频率的影响

从图7可以看出,高跨比的改变对双线U型简支梁竖向弯曲振动频率的影响比较小,影响幅度在2%左右,但整体上呈现增大的趋势。

5 结论

(1) 利用能量变分法推导了双线U型截面简支梁桥竖向弯曲振动频率计算公式,发现竖向弯曲振动频率受多个因素影响,剪切变形会影响U型梁的竖向弯曲振动频率。

(2) 利用本文的竖向弯曲振动频率公式计算的结果与ANSYS结果和MIDAS/Civil结果吻合良好,验证了本文理论的正确性和适用性,且最大误差在10%左右,精度较高,可为类似桥型的竖向弯曲振动频率计算提供参考。

(3) 宽跨比会对双线U型截面简支梁桥的竖向弯曲振动频率产生较大影响,随着宽跨比的不断增大,竖向弯曲振动频率也逐渐增大,且对第一阶的影响最大,增幅为35.03%,随着阶数的增大,影响在逐渐减小。

(4) 道床板厚度的变化会对双线U型截面简支梁桥竖向弯曲振动频率产生较大影响,随着道床板厚度的不断增大,竖向弯曲振动频率在不断增加,

且对第一阶的影响最大,增幅为 6.93%,随着阶数的增大,影响逐渐减小;高跨比对双线 U 型简支梁竖向弯曲振动频率的影响较小,影响幅度在 2% 左右。

参考文献:

- [1] 聂建国,胡红松.简支槽形梁考虑空间受力的理论解[J].工程力学,2012,29(12):64-71.
- [2] 甘亚南,周广春,赫中营.槽形梁动力反应分析的能量变分法[J].振动与冲击,2010,29(11):195-198,262.
- [3] 甘亚南,吴亚平.自平衡条件对槽形梁力学特性影响的分析[J].世界桥梁,2011(2):43-47.
- [4] 周坚,涂令康.再论槽型宽梁的剪力滞[J].工程力学,1994(2):65-75.
- [5] 周坚.考虑剪力滞影响的槽型宽梁应力挠度计算[J].力学与实践,1986(3):45-47.
- [6] 倪元增.槽型宽梁的剪力滞问题[J].土木工程学报,1986(4):32-41.
- [7] 宋晓东,吴定俊,李奇.考虑翘曲的轨道交通新型 U 形梁应力分析[J].结构工程师,2011,27(5):68-72.
- [8] 雒敏,蔺鹏臻,孙理想.单箱双室箱梁的剪力滞效应分析[J].力学与实践,2013,35(6):70-74.
- [9] Moon J, Ko H J, Sung I H, et al. Natural frequency of a composite girder with corrugated steel web[J]. Steel & Composite Structures, 2015, 18(1):255-271.
- [10] 冀伟,罗奎,马万良,等.波形钢主梁-钢道床板-混凝土顶板组合简支箱梁纯弯曲竖向振动频率的参数分析[J].振动工程学报,2020,33(5):1053-1061.
- [11] 张云龙,郭阳阳,王静,等.钢-混凝土组合梁的固有频率及其振型[J].吉林大学学报(工学版),2020,50(2):581-588.
- [12] 罗奎,冀伟,马万良.考虑剪切变形效应下波形钢主梁组合箱梁的矩阵分析方法[J].铁道科学与工程学报,2019,16(10):2505-2513.
- [13] 罗奎,冀伟,张经纬.基于动力刚度矩阵的波形钢主梁 PC 连续箱梁桥自振频率分析[J].公路交通科技,2020,37(2):91-98.
- [14] Girhammar U A, Pan D H, Gustafsson A. Exact dynamic analysis of composite beams with partial interaction[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2009,51:565-582.
- [15] Feng Y L, Jiang L Z, Zhou W B. Improved analytical method to investigate the dynamic characteristics of composite box beam with corrugated webs[J]. International Journal of Steel Structures, 2020,20(1):194-206.
- [16] 陈卓异,黄侨,李传习,等.波形钢主梁组合槽型梁静载试验与有效预应力分析[J].土木工程学报,2018,51(8):60-70.
- [17] 柳春光,王晓晓.大跨度连续刚构桥在地震、波浪作用下的动力响应[J].水利与建筑工程学报,2019,17(2):145-150.
- [18] 关孝文,张莉,胡世浩,等.基于行车激励的桥梁动力性能测试与状态评估[J].水利与建筑工程学报,2019,17(6):226-230.
- [19] 冀伟,罗奎,闫林君.波形主梁钢箱-混凝土组合梁桥的自振特性分析[J].振动、测试与诊断,2021,41(1):190-196,208.
- [20] 罗奎.波形主梁钢箱-混凝土组合梁桥的动力特性研究[D].兰州:兰州交通大学,2020.
- [21] 冀伟,罗奎,马万良,等.装配式波形主梁钢箱-混凝土组合梁桥动力特性分析与试验研究[J].振动与冲击,2020,39(20):1-7,16.
- [22] Cao L, Liu J P, Frank Chen Y. Theoretical and numerical study on the natural frequencies of bridges with corrugated steel webs[J]. Structures, 2018, 15(2):224-231.
- [23] 刘晶波,杜修力.结构动力学[M].北京:机械工业出版社,2005.