

DOI:10.3969/j.issn.1672-1144.2018.01.031

# Fellenius 法的一种新的解法

邱超,王平安,刘建元

(西安建筑科技大学 土木工程学院, 陕西 西安 710055)

**摘要:** Fellenius 法作为一种经典的边坡稳定性分析方法,由于此法更加安全,故而在边坡工程中被广泛应用。为提高 Fellenius 法分析边坡稳定性的计算精度,避免得到局部最优解的缺陷,同时降低计算量,提出了 Fellenius 法的一种新的解法。通过引入竖向中心角,将安全系数表示为关于竖向中心角的解析表达式,将优化问题转换为多维有约束优化问题,利用 MATLAB 中专门求解该优化问题的 *fmincon* 函数,编制了相关的程序,对边坡稳定性问题进行了优化。通过静力条件和动力条件下的算例分析,研究表明:解析法是条分法的下线解,新的解法具有更强的全局搜索能力和收敛能力。

**关键词:** 边坡稳定性;Fellenius 法;解析计算;MATLAB 优化

中图分类号: TU43

文献标识码: A

文章编号: 1672-1144(2018)01-0174-04

## A New Solution of Fellenius Method

QIU Chao, WANG Pingan, LIU Jianyuan

(College of Civil Engineering, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an, Shaanxi 710055, China)

**Abstract:** Fellenius method is a classical solution which has been widely used in slope engineering due to its safety. In order to improve the computational accuracy, avoid the defect of local optimum solution and reduce the computational complexity of slope stability analysis by Fellenius method. A new solution of Fellenius method is proposed. The safety factor is expressed as the analytical expression of the vertical central angles, and the optimization problem is transformed into the multi-dimensional constrained nonlinear optimization problem, it can be solved well by using the *fmincon* function of MATLAB. Through the analysis of static and dynamic slopes, the results show that the analytic solution is the lower bound solution of the slice method, and the new method has stronger global searching ability and convergence ability.

**Keywords:** slope stability; Fellenius method; analytical calculation; MATLAB optimization

边坡具有数量多、危害性大的特点,一直是岩土工程中研究的热点和难点问题<sup>[1-4]</sup>。Fellenius 法作为边坡稳定性分析的经典方法,虽然该法不能完全满足静力平衡条件,但是其安全系数计算结果偏于安全<sup>[5]</sup>,被广泛应用到边坡稳定性分析当中。

自 Fellenius 法被提出以来,不断有学者对其进行研究与改进。Cao J G 等<sup>[6]</sup>采用积分代替条分的方法,将安全系数表示为坐标和半径的表达式,采用 Powell 法对问题进行了优化,但是该法存在着得到局部最优解的缺陷,蒋斌松等<sup>[7-8]</sup>采用解析计算的方法,得到了安全系数的解析表达式,然后利用函数求极值的方法得到安全系数的最优解,但是其计算形式太过于复杂,不利于工程应用。李闯等<sup>[9]</sup>运用

解析计算的方法得到了 Fellenius 法的安全系数关于边坡参数的显示表达式,该法无需试算与解方程,但是其计算太过于复杂,且在精度上不能保证。

针对以上问题,本文提出了 Fellenius 法的一种新的解法,采用解析方法得到安全系数的解析表达式,将竖向中心角作为优化变量,将优化问题转化为有约束优化问题,利用 MATLAB 中 *fmincon* 函数对问题进行优化,与传统无约束优化问题相比,该优化方法可以更加容易且快速地得到优化结果。提出的解析方法可以很好的得到安全系数的全局最优解,其计算形式相对简单,并不需要进行反复的迭代计算,有效地避免了传统方法迭代繁琐和得到局部最优解的问题。

# 1 基本假定

如图 1 所示,均质土坡,潜在滑动面为圆弧滑动面,滑动面圆心  $O$ ,半径  $r_0$ ,边坡高度  $H$ ,坡角  $\theta$ ,土体重度  $\gamma$ ,内摩擦角  $\varphi$ ,黏聚力  $c$ 。 $x_0, y_0$  分别为边坡滑动面圆心的横、纵坐标。 $D, F$  分别为过  $C, A$  两点竖直线与潜在滑动面的交点。 $\mu$  为  $G$  点的横坐标,  $\alpha_1, \alpha_2, \eta, \beta$  分别为  $G, F, E, B$  对应于  $O$  点的竖向中心角,  $\phi$  为边坡滑动面上任意一点对应于  $O$  点的竖向中心角,顺时针为正。 $k_v$  为竖向地震加速度系数,  $k_h$  为水平地震加速度系数,  $T_i, N_i$  分别为土条上作用的切向力和正向力,  $X_i, X_{i-1}$  为条间作用的合力,  $W_i$  为土条重量。在分析问题之前做如下几点基本假定:

- (1) 边坡安全系数等于抗滑力与下滑力之比,且边坡潜在滑动面上安全系数相同;
- (2) 地震作用下水平地震力为  $k_h W_i$ , 竖向地震力为  $k_v W_i$ ;
- (3) 边坡土体满足摩尔 - 库仑屈服准则,即

$$\tau_f = \sigma \tan \varphi + c \quad (1)$$

式中:  $\tau_f, \sigma$  分别为边坡破坏时,滑动面上的切应力和正应力。

- (4) 土条条间合力满足下列关系式:

$$X_i - X_{i-1} = 0 \quad (2)$$

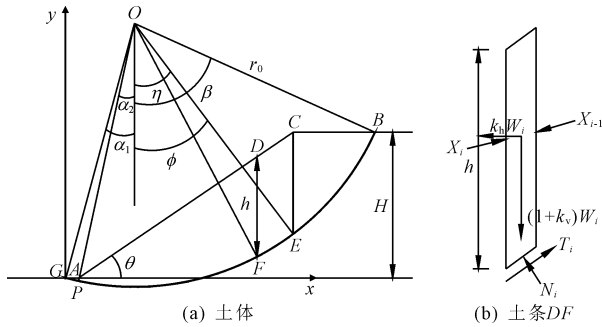


图 1 滑动面参量示意图

# 2 安全系数解析计算

对边坡土体进行竖直条分,对任意竖直土条  $DF$  进行静力平衡分析,有:

$$\begin{cases} T_i \cos \phi - N_i \sin \phi - k_h W_i = 0 \\ T_i \sin \phi + N_i \cos \phi - (1 + k_v) W_i = 0 \end{cases} \quad (3)$$

反解出  $T_i, N_i$  有:

$$\begin{cases} T_i = (1 + k_v) W_i \sin \phi + k_h W_i \cos \phi \\ N_i = (1 + k_v) W_i \cos \phi - k_h W_i \sin \phi \end{cases} \quad (4)$$

安全系数定义为边坡潜在滑动面上抗滑力与下

滑力之比,可以表示为:

$$F_s = \frac{\sum_{i=1}^n (c l_i + N_i \tan \varphi)}{\sum_{i=1}^n T_i} = \frac{\sum_{i=1}^n c l_i + \tan \varphi [(1 + k_v) \sum_{i=1}^n W_i \cos \phi - k_h \sum_{i=1}^n W_i \sin \phi]}{(1 + k_v) \sum_{i=1}^n W_i \sin \phi + k_h \sum_{i=1}^n W_i \cos \phi} \quad (5)$$

式中:  $l_i$  为任意土条底面长度,  $n$  为划分的土条数。为了更加精确的表达安全系数,采用积分的方法来代替条分法。

由图 1 的几何关系,边坡滑动面上任意一点的土体上方高度  $h$  可以表示为:

$$h = \begin{cases} r_0 \cos \phi - y_0, & \alpha_1 \leq \phi < \alpha_2 \\ r_0 (\sin \phi \tan \theta + \cos \phi) + x_0 \tan \theta - y_0, & \alpha_2 \leq \phi < \eta \\ r_0 \cos \phi - y_0 + H, & \eta \leq \phi \leq \beta \end{cases} \quad (6)$$

将圆弧滑动面的圆心坐标  $x_0, y_0$  和半径  $r_0$  用竖向中心角表示,即:

$$\begin{cases} x_0 = -\frac{H \sin \alpha_2}{\cos \alpha_1 - \cos \beta} \\ y_0 = \frac{H \cos \alpha_1}{\cos \alpha_1 - \cos \beta} \\ r_0 = \frac{H}{\cos \alpha_1 - \cos \beta} \end{cases} \quad (7)$$

联立式(5)、式(6)、式(7),安全系数可以表示为:

$$F_s = \frac{\frac{c}{\gamma h} (\beta - \alpha_1) (\cos \alpha_1 - \cos \beta) + \tan \varphi [(1 + k_v) I_1 - k_h I_2]}{(1 + k_v) I_2 + k_h I_1} \quad (8)$$

式中:

$$I_1 = -(\cos \alpha_1 + \tan \theta \sin \alpha_2) \left[ \frac{1}{2} (\eta - \alpha_2) + \frac{1}{4} (\sin 2\eta - \sin 2\alpha_2) \right] - \cos \beta \left[ \frac{1}{2} (\beta - \eta) + \frac{1}{4} (\sin 2\beta - \sin 2\eta) \right] + \frac{1}{3} \tan \theta (\cos^3 \alpha_2 - \cos^3 \eta) + \frac{1}{3} (\sin^3 \alpha_1 - \sin^3 \beta) + (\sin \beta - \sin \alpha_1) - \cos \alpha_1 \left[ \frac{1}{2} (\alpha_2 - \alpha_1) + \frac{1}{4} (\sin 2\alpha_2 - \sin 2\alpha_1) \right] \quad (9)$$

$$I_2 = \frac{1}{3} (\cos^3 \alpha_1 - \cos^3 \beta) + \frac{1}{3} \tan \theta (\sin^3 \eta - \sin^3 \alpha_2) -$$

$$\frac{1}{2} \cos \beta (\sin^2 \beta - \sin^2 \eta) - \cos \alpha_1 (\sin^2 \alpha_2 - \sin^2 \alpha_1) - \frac{1}{2} (\cos \alpha_1 + \tan \theta \sin \alpha_2) (\sin^2 \eta - \sin^2 \alpha_2) \quad (10)$$

由式(8)可以看出,安全系数只与  $c/(\gamma h)$ 、 $\tan \varphi$  这两个参数有关,对于不同的边坡,如果这两个参数相同,则安全系数与潜在滑动面均相同;如果参数  $c/(\gamma h \tan \varphi)$  相等,则潜在滑动面一致。对于一定的边坡,安全系数只与  $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$ 、 $\eta$ 、 $\beta$  这 4 个变量有关,将这 4 个变量作为优化变量对安全系数进行优化,便可得到其全局最优解。

### 3 MATLAB 程序优化

考虑到本文优化问题为多维约束非线性优化问题,本文采用 MATLAB 中 `fmincon` 函数求解安全系数的最小值和其相对应的潜在滑动面,`fmincon` 数学模型<sup>[10]</sup>为:

$$\min f(x). \text{ S. t. } \begin{cases} Ax \leq b \\ \text{Aeq. } x = \text{beq} \\ C(x) \leq 0 \\ \text{Ce q}(x) = 0 \\ lb \leq x \leq ub \end{cases} \quad (11)$$

式中:  $Ax \leq b$ , 线性不等式约束;  $\text{Aeq. } x = \text{beq}$ , 非线性等式约束;  $C(x) \leq 0$ , 非线性不等式约束;  $\text{Ce q}(x) = 0$ , 非线性等式约束;  $lb \leq x \leq ub$ , 有界约束。

对于小规模优化问题,`fmincon` 采用序列二次规划方法,该算法通过将原问题转化为一系列二次规划子问题的求解来获得原问题的优化解,对拉格朗日函数取二次近似,从而提高二次规划子问题的精确程度,对非线性较强的问题也能优化计算。序列二次规划方法的基本原理为:在某个近似解处将原非线性规划问题简化为处理一个二次规划问题,求取最优解,如果有,则认为是原有非线性问题的最优解,否则,用近似解代替构成一个新的二次规划问题,继续迭代。

为了得到边坡安全系数的最小值,以及其对应的边坡潜在滑动面,应用 MATLAB 软件,编制了相关的优化程序进行求解,式(8)的安全系数为中心角  $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$ 、 $\eta$ 、 $\beta$  的函数,该问题为非线性约束问题,约束条件为:

$$\begin{cases} \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \eta \leq \beta \\ (\cos \alpha_1 - \cos \beta) \cot \theta - \sin \eta + \sin \alpha_2 = 0 \end{cases} \quad (12)$$

在进行优化的过程中,需要对初始值进行设置,初始值的选取对收敛速度或者是否收敛起着关键性

的影响,初始值选取的不恰当,优化问题的解可能陷入局部最优解。在计算的过程中, $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$  取值接近 0,  $\beta$  值的取值范围可以为 1.2 ~ 1.5,  $\eta$  可以取  $\alpha_2$  和  $\beta$  的中间值,发现经过最多 3 ~ 4 次尝试便可以得到边坡稳定性分析的全局最优解。

## 4 对比计算与分析

### 4.1 静力条件下对比分析

为了验证本文方法和优化程序的正确性,对已有典型算例进行对比计算。均质土坡<sup>[11]</sup>,土体重度  $\gamma = 18.5 \text{ kN/m}^3$ ,边坡高度  $H = 8 \text{ m}$ ,坡度分别为 1:1 和 2:1。为了分析强度参数对边坡稳定性的影响,土体内摩擦角分别取  $10^\circ$ 、 $15^\circ$ 、 $20^\circ$ ,黏聚力分别取 5 kPa、10 kPa、15 kPa、20 kPa、25 kPa、30 kPa。

本文计算方法得到的结果与 Fellenius 条分法计算得到的结果见表 1。

表 1 安全系数对比表

$\theta/(\circ)$	$c/\text{kPa}$	$\varphi/(\circ)$	安全系数	
			本文方法	Fellenius 条分法
1:1	25	20	1.6787	1.6818
1:1	20	20	1.4605	1.4630
1:1	15	20	1.2360	1.2383
1:1	10	20	1.0006	1.0010
1:1	30	15	1.7258	1.7288
1:1	25	15	1.5167	1.5198
1:1	20	15	1.3045	1.3070
1:1	15	15	1.0874	1.0893
1:1	10	15	0.8618	0.8633
1:1	25	10	1.3528	1.3554
1:1	20	10	1.1464	1.1484
1:1	15	10	0.9368	0.9383
2:1	20	20	1.9625	1.9632
2:1	15	20	1.7068	1.7086
2:1	10	20	1.4391	1.4403
2:1	5	20	1.1475	1.1479
2:1	25	15	1.9466	1.9481
2:1	20	15	1.7055	1.7062
2:1	15	15	1.4586	1.4592
2:1	10	15	1.2018	1.2028
2:1	5	15	0.9248	0.9253
2:1	15	10	1.2114	1.2124
2:1	10	10	0.9663	0.9667

从表 1 可以看出,两种方法计算的安全系数吻合得很好,验证了提出的解析方法的正确性,同时也

表明解析方法是条分法的下限解。利用本文编制的相关程序,可以很快的得到边坡稳定性分析的结果,同时也能保证得到全局最优解,得到安全系数取最小值时的  $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$ 、 $\eta$ 、 $\beta$  值,带入式(7),便可以得到临界圆滑滑动面的圆心和半径,从而确定边坡潜在滑动面。

#### 4.2 动力条件下对比分析

水平地震加速度系数与竖向地震加速度系数之间关系可以表示为:

$$k_v = \xi k_h \quad (13)$$

式中: $\xi$  表示  $k_v$  相对于  $k_h$  的比例系数。研究表明<sup>[12-14]</sup>:一般取  $\xi = 0.5$ ,  $k_h$  取 0.0 ~ 0.3 能够满足工程的要求。

均质土坡,边坡参数:边坡高度  $H = 30$  m,  $c/(\gamma H) = 0.15$ ,  $\varphi = 40^\circ$ ,  $\xi = 0.5$ 。当边坡安全系数  $F_s = 1$  时对应的水平向加速度系数即为水平向屈服加速度系数,记为  $k_h$ 。对应不同的边坡坡角,本文计算得到的水平向屈服加速度系数与已有计算结果见表 2。从表 2 可以看出,本文计算的水平向屈服加速度系数与已有计算结果很接近,但是由于本文考虑了竖向地震作用系数的影响,二者的计算结果还是有一点不同,竖向地震加速度系数的影响不可忽视。同时,由表 2 可以得到,随着边坡坡角的增大,水平向屈服加速度系数不断减小。

表 2 水平向屈服加速度对比结果

数据来源	$k_h$			
	$\theta = 45^\circ$	$\theta = 60^\circ$	$\theta = 75^\circ$	$\theta = 90^\circ$
Chang C J 等 <sup>[15]</sup>	0.677	0.516	0.333	0.116
罗强等 <sup>[16]</sup>	0.738	0.507	0.294	0.088
本文	0.580	0.423	0.278	0.086

通过以上算例分析表明,静力条件下和动力条件下案例分析表明了本文计算结果和优化程序的正确性。

## 5 结 论

通过以上分析,得到如下结论:

(1) 提出了 Fellenius 法的一种新的解法,以竖向中心角为自变量,推导出了安全系数的解析表达式,并给出了相应的优化程序。

(2) 随着边坡坡角的增大,水平向屈服加速度系数不断减小,同时竖向地震加速度系数的影响不

可忽视。

(3) 提出的解析法能够有效避免得到局部最优解的缺陷,具有更强的全局搜索能力和收敛能力。

#### 参考文献:

- [1] 邓东平,李亮,赵炼恒.地震作用下边坡稳定性分析的拟静力解法研究[J].中南大学学报(自然科学版),2014,45(10):3578-3588.
- [2] 赵博,赵亚琼.边坡稳定性性能的判定方法研究及其工程应用[J].水利与建筑工程学报,2017,15(1):25-29.
- [3] 王华俊,卿翠贵,姚文杰.一种改进的遗传算法在边坡工程中的应用[J].水利与建筑工程学报,2015,13(3):195-199.
- [4] Baker R, Garber M. Theoretical analysis of the Stability of slopes[J]. Geotechnique, 1978,28(4):195-411.
- [5] 方玉树.边坡稳定性分析条分法最小解研究[J].岩土工程学报,2008,30(3):331-335.
- [6] Gao J G, Zaman M M. Analytical method for analysis of slope stability[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1999,23(5):439-449.
- [7] 蒋斌松,蔡美峰,吕爱钟.边坡稳定性的解析计算[J].岩石力学与工程学报,2004,33(6):2726-2729.
- [8] 蒋斌松,蔡美峰,吕爱钟.纯黏土边坡稳定性解析计算[J].工程力学,2003,20(5):204-208.
- [9] 李闯,赵盛杰,董晔,等.Fellenius法的解析算法[J].水利与建筑工程学报,2016,14(5):202-210.
- [10] 李娅.MATLAB R2015b最优化计算[M].北京:清华大学出版社,2017.
- [11] Huang S L, Yamasaki K. Slope failure analysis using local minimum factor - of - safety approach [J]. Journal of Geotechnical engineering ASCE, 1993, 119 (12): 1974-1989.
- [12] Ausilio E, Conte E, Dente G. Seismic stability analysis of reinforced slopes[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2000,19(3):159-172.
- [13] Michalowski R L. Soil reinforcement for seismic design of geotechnical structures [J]. Computers and Geotechnics, 1998,23(1):1-17.
- [14] 中华人民共和国建设部.建筑抗震设计规范:GB 50011—2001[S].北京:中国建筑工业出版社,2002.
- [15] Chang C J, Chen W F, Yao J T. Seismic displacements in slopes by limit analysis[J]. Journal of Geotechnical Engineering ASCE, 1984,110(7):860-874.
- [16] 罗强,赵炼恒,李亮,等.地震效应和坡顶超载对均质土坡稳定性影响的拟静力分析[J].岩土力学,2010,31(12):3835-3841.