

ABAQUS 退化的动力无限元单元

邹 烨

(湖南省交通科学研究院有限公司,湖南长沙410011)

摘要:针对 ABAQUS 中的三维无限元单元只适用于有限域为六面体单元的情况,提出一种退化无限元单元,推导该退化无限元单元的等效节点力计算公式,以及对相应的地震动输入方式进行分析。数值模型试验结果表明:该单元无需进行二次开发即可用于有限域采用四面体单元的情况,能适应更普遍的模型网格剖分形式。该退化单元具有良好的精度及更好的网格适应性,能广泛用于动力问题的分析。

关键词:退化无限元单元;六面体无限元单元;地震动输入;等效节点力;ABAQUS

中图分类号: TU4

文献标识码: A

文章编号: 1672-1144(2023)06-0122-06

Degenerate Dynamic Infinite Element Based on ABAQUS

ZOU Ye

(Hunan Communications Research Institute Co., Ltd., Changsha, Hunan 410011, China)

Abstract: A degenerate infinite element is proposed for the case where the three-dimensional infinite element in ABAQUS is only suitable for finite fields using hexahedral elements. This element can be used in the case of using tetrahedral elements in finite regions without redevelopment, and can adapt to more general mesh forms of the model. A calculation formula for the equivalent nodal forces of the degenerated tetrahedral infinite element is presented, and the seismic input methods are analyzed accordingly. The numerical model test results demonstrate that the degraded element has good accuracy and better mesh adaptability, and can be widely used for the analysis of dynamic problems.

Keywords: degenerate infinite element; hexahedral infinite element; seismic input; equivalent nodal forces; ABAQUS

岩土结构如隧道、高边坡、坝基等的动力稳定性一直是工程领域所关心的问题^[1],而利用数值方法进行结构动力问题分析的关键之一就是边界条件的处理。岩土工程数值模拟过程中常使用人工边界条件,以实现近场区域与无限外部区域之间波动能量的交换^[2],让波动自然传至无限域内。

人工边界可分为两种:全局人工边界和局部人工边界^[3]。全局人工边界如边界元法,这类边界满足了无限域内的所有场方程和物理边界条件,具有较高的精度;而由于其时空耦联的特性(即某一边界节点的运动与其他所有边界节点之前各个时刻的运动有关),计算量与内存需求较大,难以满足大型工程问题的分析需求;局部人工边界是在一定的近似条件下导出的人工边界条件,目前常用的粘性边

界、粘弹性边界、透射边界、无限元边界均属于局部人工边界^[4]。局部人工边界具有时空解耦的特性(即边界上某一点的运动只与相邻边界节点与该节点上一时刻的运动情况有关),在牺牲一部分精度的条件下具有节省机时与内存的作用,在许多大型工程中得到了应用。

无限元是一种几何上趋于无穷的单元^[5],ABAQUS 中的无限元单元已有许多相关的研究与应用^[6-12]。针对三维情况,仅有的八节点、十二节点与十六节点的六面体三维无限元单元要求有限域与无限域连接面为四边形,这一要求对于实际工程中复杂的地质模型比较严苛,因为复杂岩土工程模型为减小计算成本,获取更好的收敛性,往往采用四面体单元、六面体无限元单元的使用由此受到了限制。

从这一问题出发,在 ABAQUS 中三维无限元的基础上进行改进,提出一种由六面体无限元单元演变而来的退化无限元单元以适应有限域与无限域交界面为三角形的情况,推导退化无限元单元的等效节点应力计算公式,并研究其地震动输入方式。通过建立有限元-无限元(FEM-INF)耦合分析模型进行数值试验,与理论结果进行对比验证退化无限元单元的合理性。

1 动力无限元人工边界

1.1 边界阻尼

无限元由 Bettess 和 Zienkiewicz 于 1977 年提出^[13],用于解决有限元方法求解无限域问题时的局限性。ABAQUS 中的无限元理论参考了 Lysmer 与 Kuhlemeyer 等的工作,其动力无限元可视为一种黏性吸收边界^[14],通过引入边界阻尼 d 来消除反射。

对于沿 Z 轴正向传播的波,其运动微分方程 $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$ 的通解^[15] 为:

$$w = f_1(z - ct) + f_2(z + ct) \quad (1)$$

式中: z 为轴向坐标; c 为波速; t 为时间; w 为波动所引起的边界节点位移,对于任意瞬时 t , w 为 z 的函数; $f_1(z - ct)$ $f_2(z + ct)$ 分别为入射波与反射波位移方程。阻尼力的大小可以表示为:

$$\sigma_d = -d \frac{\partial w}{\partial t} = dc(f_1' - f_2') \quad (2)$$

式中: d 为边界阻尼; f_1' f_2' 分别表示 f_1 f_2 的一阶导数。

(1) 对于 P 波:沿 Z 轴的传播将引起该方向上的位移 w ,相应的应变为: $\varepsilon = \frac{\partial w}{\partial z} = f_1' + f_2'$,由广义胡克定律,产生的边界节点应力为:

$$\sigma = 2G\varepsilon + \lambda\theta = (2G + \lambda)(f_1' + f_2') \quad (3)$$

式中: G 为传播介质的剪切模量; λ 为拉梅常数; θ 为体应变。

由边界节点的平衡条件有 $\sigma = \sigma_d$,即:

$$(2G + \lambda)(f_1' + f_2') = d_p c_p (f_1' - f_2') \quad (4)$$

式中: c_p 表示纵波波速,且 $c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}}$, ρ 为介质密度;为达到消除反射的效果,要求 $f_2 = 0$,可得法向阻尼系数:

$$d_p = \frac{2G + \lambda}{c_p} = \rho c_p \quad (5)$$

(2) 对于 S 波:沿 Z 轴的传播将引起其垂直方

向上质点的运动,相应的应变为: $\gamma = \frac{\partial w}{\partial z} = f_1' + f_2'$,

产生的边界节点应力为:

$$\tau = G\gamma = G(f_1' + f_2') \quad (6)$$

同样按照‘边界上不产生反射’的要求,可得切向阻尼系数:

$$d_s = \frac{G}{c_s} = \rho c_s \quad (7)$$

式中: c_s 为横波波速,且 $c_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ 。

1.2 退化的动力无限元单元

ABAQUS 提供了三种适用于连续实体介质的三维无限元单元,均为六面体单元,分别为八节点、十二节点和十八节点三种类型(见图 1),单元形状决定了使用时要求有限元与无限元的交界面为四边形。对一些模型复杂的实际工程问题,网格划分时常采用适用性更强、计算规模更低的四面体单元,这时将不能使用仅提供的三维六面体无限元单元。

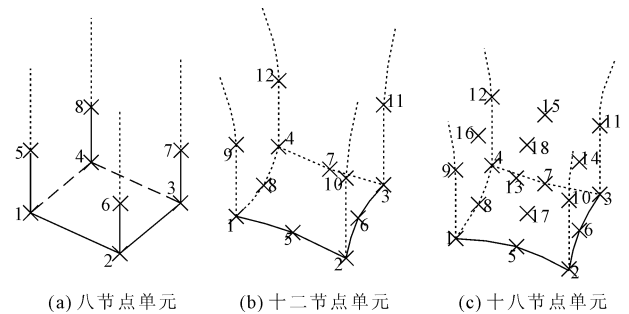


图 1 三维无限元单元

为解决这一问题,在现有单元的基础上提出了一种退化的无限元单元。具体做法是,让单元交界面上的任意一条边上的节点重合而退化成一个点,使交界面由(曲边)四边形退化成(曲边)三角形。交界面的退化过程见图 2。

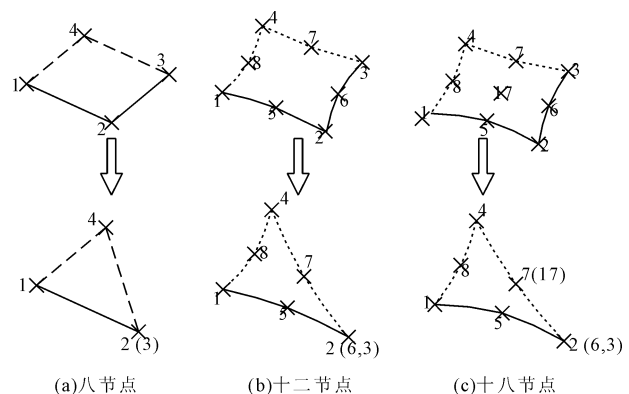


图 2 交界面的退化过程

2 退化单元的等效节点力

在 ABAQUS 中输入地震波时,需要采用节点力时程的地震动输入方式才能保证无限元人工边界的吸收性能^[16]。 t 时刻,作用在无限元边界上的 i 节点的等效节点力主要由边界阻尼力 F_i^{damp} 与介质抗力 F_i^{wave} 两部分组成^[17],即:

$$F_i(t) = F_i^{\text{damp}} + F_i^{\text{wave}} = \bar{A}_i [dv_i(t) + \sigma_i(t)] \quad (8)$$

式中: $v_i(t)$ 为 t 时刻节点的速度; $\sigma_i(t)$ 为 t 时刻介质的抵抗应力,可由胡克定律进行计算; \bar{A}_i 为节点 i 的影响面积。

2.1 等效节点力的计算

以地震波从底部垂直入射的情况为例,见图 3。

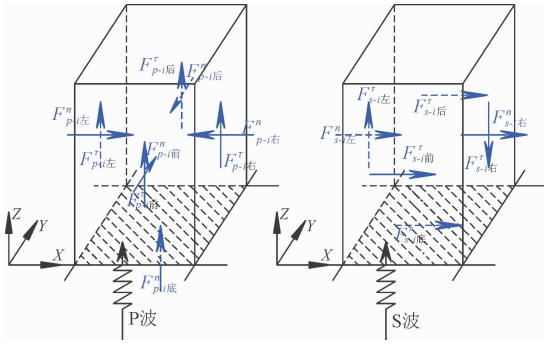


图 3 等效节点力计算

(1) 在 P 波作用下,假设输入波的速度时程为 $V_p(t)$ 。

对底部边界,法向阻尼力为: $F_{p-i底}^{\text{damp}-n} = \bar{A}_i d_p c_p f_1'$
 $= \bar{A}_i d_p V_p(t)$,法向介质抗力为: $F_{p-i底}^{\text{wave}-n} = \bar{A}_i (2G + \lambda) f_1' = \bar{A}_i \rho c_p V_p(t)$;底边界上各节点(除与各侧面的交点外)无切向运动,即切向阻尼力 $F_{p-i底}^{\text{damp}-\tau} = 0$;切向介质抗力 $F_{p-i底}^{\text{wave}-\tau} = 0$,因此,底部边界法向与切向的等效节点力分别为:

$$F_{p-i底}^n = F_{p-i底}^{\text{damp}-n} + F_{p-i底}^{\text{wave}-n} = 2\bar{A}_i d_p V_p(t); F_{p-i底}^\tau = 0 \quad (9)$$

对左侧边界,法向阻尼力为 $F_{p-i左}^{\text{damp}-n} = 0$,法向介质抗力为 $F_{p-i左}^{\text{wave}-n} = \bar{A}_i \lambda f_1' = \bar{A}_i \frac{\lambda}{c_p} V_{p-1}(t)$,切向阻尼力为 $F_{p-i左}^{\text{damp}-\tau} = \bar{A}_i d_s V_{p-2}(t)$,切向介质抗力为 $F_{p-i左}^{\text{wave}-\tau} = 0$,因此,左侧边界法向与切向的等效节点力分别为:

$$F_{p-i左}^n = \bar{A}_i \frac{\lambda}{c_p} V_{p-1}(t); F_{p-i左}^\tau = \bar{A}_i d_s V_{p-2}(t) \quad (10)$$

由对称性,右侧、前侧、后侧边界的法向与切向

等效节点力分别为式(11)、式(12)、式(13):

$$F_{p-i右}^n = -\bar{A}_i \frac{\lambda}{c_p} V_{p-1}(t); F_{p-i右}^\tau = \bar{A}_i d_s V_{p-2}(t) \quad (11)$$

$$F_{p-i前}^n = \bar{A}_i \frac{\lambda}{c_p} V_{p-1}(t); F_{p-i前}^\tau = \bar{A}_i d_s V_{p-2}(t) \quad (12)$$

$$F_{p-i后}^n = -\bar{A}_i \frac{\lambda}{c_p} V_{p-1}(t); F_{p-i后}^\tau = \bar{A}_i d_s V_{p-2}(t) \quad (13)$$

(2) 在 S 波作用下,假设输入波的速度时程为 $V_s(t)$ 。

对底部边界,法向阻尼力与法向介质抗力均为 0,即: $F_{s-i底}^{\text{damp}-n} = 0; F_{s-i底}^{\text{wave}-n} = 0$,切向阻尼力为: $F_{s-i底}^{\text{damp}-\tau} = \bar{A}_i d_s V_s(t)$;切向介质抗力为: $F_{s-i底}^{\text{wave}-\tau} = \bar{A}_i \rho c_s V_s(t)$,因此:

$$F_{s-i底}^n = 0; F_{s-i底}^\tau = 2\bar{A}_i d_s V_s(t) \quad (14)$$

对左侧边界,法向阻尼力 $F_{s-i左}^{\text{damp}-n} = \bar{A}_i d_p V_{s-1}(t)$;法向介质抗力 $F_{s-i左}^{\text{wave}-n} = 0$,切向阻尼力 $F_{s-i左}^{\text{damp}-\tau} = \bar{A}_i d_s V_{s-1}(t)$;切向介质抗力 $F_{s-i左}^{\text{wave}-\tau} = 0$,因此:

$$F_{s-i左}^n = \bar{A}_i d_p V_{s-1}(t); F_{s-i左}^\tau = \bar{A}_i d_s V_{s-1}(t) \quad (15)$$

由反对称条件,右侧边界:

$$F_{s-i右}^n = \bar{A}_i d_p V_{s-1}(t); F_{s-i右}^\tau = -\bar{A}_i d_s V_{s-1}(t) \quad (16)$$

前侧边界:法向阻尼力 $F_{s-i前}^{\text{damp}-n} = 0$;法向介质抗力 $F_{s-i前}^{\text{wave}-n} = 0$;切向阻尼力 $F_{s-i前}^{\text{damp}-\tau} = \bar{A}_i d_s V_{s-1}(t)$;切向介质抗力 $F_{s-i前}^{\text{wave}-\tau} = 0$;因此:

$$F_{s-i前}^n = 0; F_{s-i前}^\tau = \bar{A}_i d_s V_{s-1}(t) \quad (17)$$

由对称条件,后侧边界:

$$F_{s-i后}^n = 0; F_{s-i后}^\tau = \bar{A}_i d_s V_{s-1}(t) \quad (18)$$

各节点力的方向见图 3。

上列各式中, $V_{p-1}(t)$ 、 $V_{p-2}(t)$ 、 $V_{s-1}(t)$ 、 $V_{s-2}(t)$ 为相应节点在 t 时刻的振动速度,需要由入射波时程与反射波时程在计入对应的延时后叠加求得。其中:

$$\begin{cases} V_{p-1}(t) = V_p\left(t - \frac{l}{c_p}\right) - V_p\left(t - \frac{2L-l}{c_p}\right) \\ V_{p-2}(t) = V_p\left(t - \frac{l}{c_p}\right) + V_p\left(t - \frac{2L-l}{c_p}\right) \\ V_{s-1}(t) = V_s\left(t - \frac{l}{c_s}\right) + V_s\left(t - \frac{2L-l}{c_s}\right) \\ V_{s-2}(t) = V_s\left(t - \frac{l}{c_s}\right) - V_s\left(t - \frac{2L-l}{c_s}\right) \end{cases} \quad (19)$$

式中: L 为底面至顶面的距离, l 为节点到底面的距

离;当顶面非平时, L 取节点 i 在底面与顶面投影点之间的距离。

2.2 退化单元的等效节点力

退化单元等效节点力的计算原理与 2.1 节所示一样,在计算因退化而重合的节点的等效力时,把这些点仍然看成单独的点。以退化的八节点三维无限元单元为例,如图 4 所示。

重合点的影响面积为:

$$\bar{A}_i = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n A_k \quad (20)$$

非重合点的影响面积为:

$$\bar{A}_i = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n A_k \quad (21)$$

式中: n 为受节点 i 影响的单元的个数; A_k 为单元的面积。

各边界上的等效节点力计算公式见表 1。

表 1 退化单元等效节点力计算公式

| 位置 | 等效节点力 |
|----|--|
| 底部 | $F_{p-i\text{底}}^n = \frac{2}{q} \sum_{k=1}^n A_k d_p V_p(t); F_{s-i\text{底}}^r = \frac{2}{q} \sum_{k=1}^n A_k d_s V_s(t)$ |
| 左侧 | $F_{p-i\text{左}}^n = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^n A_k \frac{\lambda}{c_p} V_{p-1}(t); F_{p-i\text{左}}^r = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^n A_k d_s V_{p-2}(t); F_{s-i\text{左}}^n = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^n A_k d_p V_{s-1}(t); F_{s-i\text{左}}^r = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^n A_k d_s V_{s-1}(t)$ |
| 右侧 | $F_{p-i\text{右}}^n = -\frac{1}{q} \sum_{k=1}^n A_k \frac{\lambda}{c_p} V_{p-1}(t); F_{p-i\text{右}}^r = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^n A_k d_s V_{p-2}(t); F_{s-i\text{右}}^n = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^n A_k d_p V_{s-1}(t); F_{s-i\text{右}}^r = -\frac{1}{q} \sum_{k=1}^n A_k d_s V_{s-1}(t)$ |
| 前侧 | $F_{p-i\text{前}}^n = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^n A_k \frac{\lambda}{c_p} V_{p-1}(t); F_{p-i\text{前}}^r = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^n A_k d_s V_{p-2}(t); F_{s-i\text{前}}^n = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^n A_k d_s V_{s-1}(t)$ |
| 后侧 | $F_{p-i\text{后}}^n = -\frac{1}{q} \sum_{k=1}^n A_k \frac{\lambda}{c_p} V_{p-1}(t); F_{p-i\text{后}}^r = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^n A_k d_s V_{p-2}(t); F_{s-i\text{后}}^n = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^n A_k d_s V_{s-1}(t)$ |

当节点为重合点时, $q = 2$; 当节点不是重合点时, $q = 4$ 。

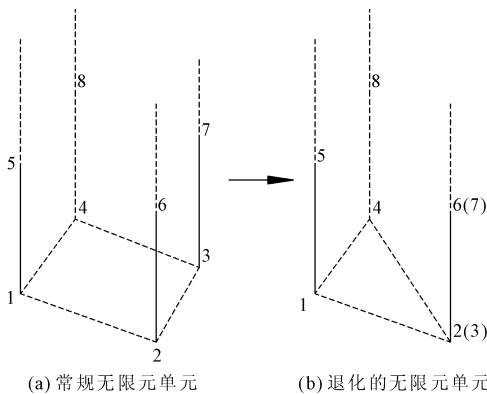


图 4 单元的转换

3 算例验证

为说明退化三维动力无限元单元的合理性,下面用数值试验加以验证。建立两个 $100 \times 100 \times 100$ 的立方块,将这两个立方块分别划分为八节点六面体模型 (C3D8) 与四节点四面体模型 (C3D4),以分别模拟无限域采用常规三维无限元单元与退化无限元单元的情况。立方块体模型除顶面外,其余 5 个面均采用无限元边界,无限元边界分别采用常规的八节点无限元单元与退化的八节点无限元单元。图 5 为有限元区域划分为六面体单元 C3D8 时的 FEM-INF 耦合模型;图 6 为有限元区域划分四面体单元 C3D4 时的 FEM-INF 耦合模型。边界上的节点一般较多,等效节点力的计算与输入要通过自编程序实现。

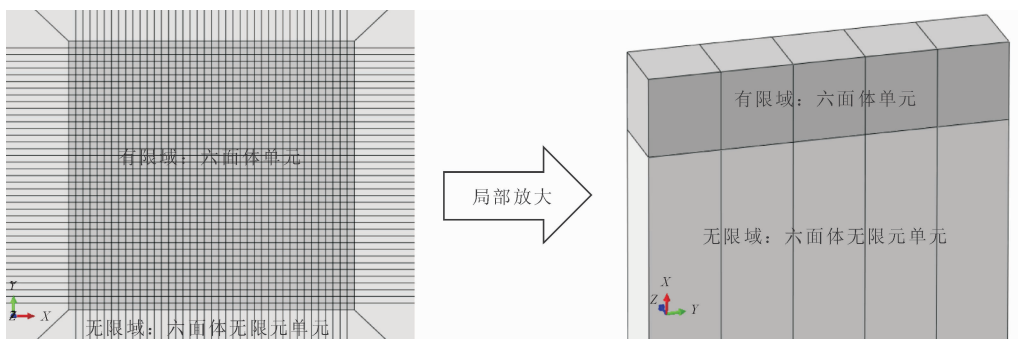


图 5 有限域为六面体单元时的 FEM-INF 耦合模型

以 P 波的形式从模型底部边界垂直输入图 7 所示的波形,这是一个峰值加速度为 4 m/s^2 的单峰波,其加速度为:

$$A = 4e^{-30\pi(t-0.5)^2} \quad (22)$$

模型的介质材料参数设置为:弹性模量 $E = 50 \text{ MPa}$,泊松比 $\nu = 0.3$;重度 $\gamma = 25 \text{ kN/m}^3$ 。模型除受

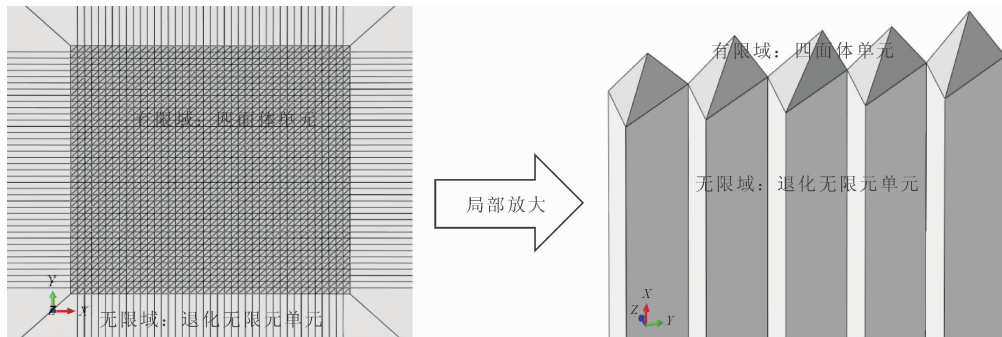


图 6 有限域为四面体单元时的 FEM-INF 耦合模型

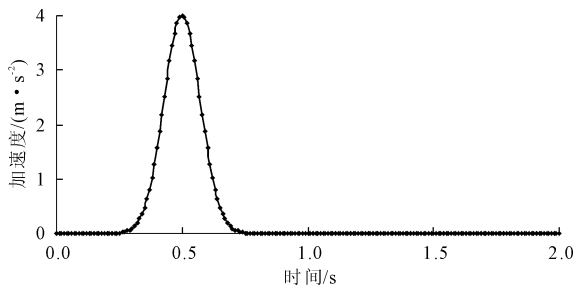


图 7 入射波波形

考虑 P 波从底面垂直入射的情况,算例的计算结果见图 8(a)。若不计算立方体材料介质的阻尼,按照理论计算的结果,P 波从立方体底部入射后,经过一定的时间延迟后到达顶面,由于这是一个与空气的界面,因此,P 波将会在顶面发生反射,入射波与反射波叠加会在顶面出现一个 2 倍的放大效应,即顶面 P 波反射加速度的理论解为:

$$A_{p-顶} = 8e^{-30\pi(t-1.11)^2} \quad (23)$$

反射波在此传回地面后,在无限元边界的作用下,不再发生反射,传向了无穷远处,这也就是人工边界条件的作用,避免了波动多次反射现象的发生。从图 8(a)可以看出,ABAQUS 中的常规三维无限元单元在动力分析中取得了与理论解几乎一致的效果,而采用退化的三维无限元单元,虽在后续有小幅的波动响应,但其结果与理论解仍具有很好的吻合度。

S 波从底部垂直入射的情况采用与 P 波入射时类似的方式进行。顶面 S 波反射加速度的理论解为:

$$A_{s-顶} = 8e^{-30\pi(t-1.64)^2} \quad (24)$$

重力与地震力作用外,无其他形式的力作用。

根据波速的计算公式,可得纵波波速为: $c_p = 164.08 \text{ m/s}$;横波波速为: $c_s = 87.71 \text{ m/s}$ 。因此,P 波从模型底面传播至顶面的时间延迟约为 0.61 s ,S 波从模型底面传播至顶面的时间延迟约为 1.14 s 。

算例验证结果见图 8(b)。从图可以看出,采用常规无限元单元与退化无限元单元对地震波均具有良好的吸收效果;采用退化无限元单元虽精度要求略低于常规无限元单元,当反射波离开顶面后,有小幅的波动现象发生,但很快趋于稳定,能基本满足动力计算上的要求。

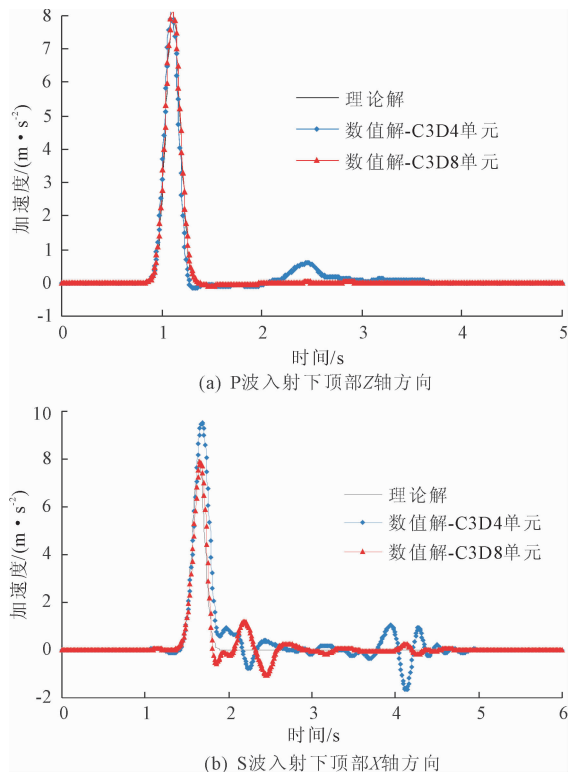


图 8 加速度响应

4 结 论

在 ABAQUS 中无限元单元的基础上,提出了一种退化无限元单元,并利用数值试验进行验证,可以得到以下结论:

(1) 退化无限元单元能使有限域与无限域之间的交界面由四边形退化为三角形,对有限域为四面体单元的情况也能较好适用,提升了三维无限元单元对主体网格剖分方式的适应能力,且无需进行二次开发,方便工程应用。

(2) 退化单元数值模拟结果与理论解吻合良好,表明退化单元具有较好的精度,研究内容为构建复杂的 FEM - INF 耦合分析模型提供了便利,可应用于工程动力问题的分析。

(3) ABAQUS 中采用动力无限元边界条件时,需要将地震动以等效节点力的形式进行输入。边界节点较多时,需要通过编程实现等效节点力的自动施加。

值得指出的是,研究内容虽然采用 ABAQUS 进行,但其中单元退化过程的处理方法对其他类似问题仍具有较好的参考意义。

参考文献:

- [1] 杜修力,路德春. 土动力学与岩土地震工程研究进展[J]. 岩土力学,2011,32(S2):10-20.
- [2] 廖振鹏. 近场波动的数值模拟[J]. 力学进展,1997,27(2):193-212.
- [3] 杜修力,赵 密,王进廷. 近场波动模拟的人工应力边界条件[J]. 力学学报,2006,38(1):49-56.
- [4] 景鹏旭,尹 超,门丽君,等. 基于黏弹性人工边界条件的岩质边坡动力反应分析[J]. 水利与建筑工程学报,2021,19(1):190-194.

- [5] 李录贤,国松直,王爱琴. 无限元方法及其应用[J]. 力学进展,2007,37(2):161-174.
- [6] 戚玉亮,太塚久哲,ABAQUS 动力无限元人工边界研究[J]. 岩土力学,2014,35(10):3007-3012.
- [7] 李嘉瑞,景立平,董 瑞,等. ABAQUS 模拟土-结构相互作用时人工边界的选取[J]. 地震工程与工程振动,2020,40(3):174-182.
- [8] 郭明伟,葛修润,王水林,等. 基于矢量和方法的边坡动力稳定性分析[J]. 岩石力学与工程学报,2011,30(3):572-579.
- [9] 左得奇,蒋良滩,骆 达,等. ABAQUS 岩土动力分析的静-动力统一人工边界研究[J]. 地震工程与工程振动,2022,42(2):201-211.
- [10] 孙海峰,景立平,孟宪春,等. ABAQUS 中动力问题边界条件的选取[J]. 地震工程与工程振动,2011,31(3):71-76.
- [11] 丁祖德,陈誉升,资 昊. 隧道地震响应中的人工边界和地震动输入方法研究[J]. 地震工程与工程振动,2022,42(3):52-61.
- [12] 李 铎,周 晶. 脉冲效应对地下管廊地震响应的影响[J]. 水利与建筑工程学报,2018,16(3):190-196.
- [13] Bettess P, Zienkiewicz O C. Diffraction and refraction of surface waves using finite and infinite elements[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1977,11:1271-1290.
- [14] 费 康,张建伟. ABAQUS 在岩土工程中的应用[M]. 北京:中国水利水电出版社,2009.
- [15] 徐芝纶. 弹性力学[M]. 北京:高等教育出版社,2006.
- [16] 赵武胜,陈卫忠,郑朋强,等. 地下工程数值计算中地震动输入方法选择及实现[J]. 岩石力学与工程学报,2013,32(8):1579-1587.
- [17] 杜修力,赵 密. 基于黏弹性边界的拱坝地震反应分析方法[J]. 水利学报,2006,37(9):1063-1069.