

基于自适应网格加密的桥梁防洪风险 数值模拟研究

林金波, 赫岩莉, 毛鸿飞, 孙一方, 吴光林

(广东海洋大学 海洋工程学院, 广东 湛江 524088)

摘要: 为了确保桥梁安全, 消除洪水灾害的威胁, 在桥梁建设前对拟建桥梁进行细致的防洪风险分析就显得尤为重要。利用有限体积方法, 结合 Delaunay 网格剖分方法, 进行自适应网格加密, 建立高效的桥梁工程防洪风险评价模型。通过桥墩周围网格局部加密的方式, 维持大范围河道大尺度计算网格, 从而降低网格数量, 提高计算效率。模型验证通过溃坝算例说明使网格数量大幅降低的同时维持了较高的计算精度。利用数值模型对某桥梁工程进行防洪风险评价, 结果表明: 桥梁工程的建设使桥墩附近流速降低, 桥墩间流速增大约 0.5 m/s 左右, 桥梁上下游断面流速降低约 0.2 m/s; 桥梁上下游河道断面水位稍有抬升, 设计洪水标准条件下桥梁上下游河道断面最高水位为 540.70 m, 低于桥梁底部最低高程 540.94 m, 拟建桥梁工程能够满足河道防洪要求。

关键词: 桥梁; 防洪风险评价; 数值模拟; Delaunay 网络剖分方法

中图分类号: TV139.2

文献标识码: A

文章编号: 1672-1144(2022)04-0189-08

Numerical Simulation on Flood Risk Analyzes of Bridge Based on Adaptive Mesh Refinement Scheme

LIN Jinbo, HE Yanli, MAO Hongfei, SUN Yifang, WU Guanglin

(College of Ocean Engineering, Guangdong Ocean University, Zhanjiang, Guangdong 524088, China)

Abstract: To ensure bridge safety and eliminate the threat of flood disaster, it is particularly important to conduct a detailed flood control risk analysis on the proposed bridge before the bridge construction. An efficient flood risk analyze model of bridge is established by using finite volume method combined with Delaunay mesh generation method which can adaptively refine the mesh. By locally refining the mesh around the pier, the large mesh size of large-scale river channel is maintained. Consequently, the mesh number is reduced and the calculation efficiency is improved. Comparing the results of water level and velocity calculated by different mesh models with the analytical solution, a greatly reduce of the mesh number is achieved meanwhile a high calculation accuracy is maintained by the local mesh refinement method. The numerical model is then used to analyze the flood risk of a bridge project. The results show that the construction of the bridge reduces the velocity near the pier and increases the velocity between the piers by about 0.5 m/s. The upstream and downstream section velocity of the bridge are reduced by about 0.2 m/s. The upstream and downstream water level of the bridge are increased slightly. The maximum water level around the bridge is 540.70 m, which is lower than the minimum bottom elevation 540.94 m of the bridge, under the design flood standard. The bridge can meet the flood control requirements of the river.

Keywords: bridge; flood risk analyze; numerical simulation; Delaunay mesh generation method

目前,我国已建各类桥梁逾 50 余万座,并以每年 1 万座的速度继续递增,桥梁建设规模也在持续增大,投资规模低则上千万,高则达上亿、上十亿,甚至投资达到数百亿人民币的桥梁工程屡见不鲜。桥梁工程在建设和运行过程中面临着各种潜在风险,特别是洪水灾害频发,从而导致桥梁损毁或倾覆破坏时有发生,造成了严重的人民生命财产损失和环境污染。因此,为了确保桥梁安全,消除洪水灾害的威胁,在桥梁建设前对拟建桥梁进行细致的防洪风险分析,研究桥梁建设后对河道行洪影响,确保桥梁防洪安全,合理控制桥梁建筑物在运行周期内的风险就显得尤为重要。

关于防洪风险的评价与分析研究早有开展,但多是基于理论分析方法。王宏伟等^[1-3]运用模糊数学、结构可靠度原理及多元联系数等理论,对洪水灾害中桥梁模糊随机性风险因素的发生概率、桥梁冲刷可靠度及流域防洪风险分布进行了计算分析。兰盈盈等^[4-6]利用随机理论,对水库大坝洪水随机过程及防洪风险、水库洪水演进过程及风险进行了分析评价。Li 等^[7]利用层次分析法,结合 GIS 空间分析,对长江三角洲 6 个典型的城市化地区不同城市化阶段的洪水灾害、承灾体暴露、承灾体脆弱性和综合洪水风险进行了评估。Wu 等^[8]提出一个包括水文、水力和地貌不确定性因素的风险分析模型,以评估基隆河防洪结构的防洪风险。Dou 等^[9]提出多参数洪水灾害指数模型,评估了中国西北部大型城市关中市区的潜在洪水风险区。Lyu 等^[10]基于区域洪水风险评估方法,结合透视法,对广州地铁系统的洪水淹没风险进行了分析研究。

近年来,基于水动力方程的数值模拟方法,在防洪风险评价中的应用逐渐增多。Pelletier 等^[11]基于隐式数值方法求解连续性方程与曼宁方程,结合卫星图像变化检测,对亚利桑那州南部托托利塔和哈夸哈拉-皮埃蒙特极端洪水事件进行模拟分析。Qi 和 Altinakar^[12]基于二维洪水数值模拟方法、GIS 及遥感技术,并结合蒙特卡罗模拟方法与事件树分析方法,对美国佐治亚州辛克莱大坝溃坝洪水风险管理策略进行了分析研究。Li 等^[13]利用城市洪水模拟模型(UFSM)和城市洪灾损失评估模型(UFDAM),结合灾害风险三角理论,对上海浦东防洪区的洪水风险进行了数值模拟研究。Tang 等^[14]利用 FVCOM 软件,对淮河-洪泽湖系统的水动力过程进行数值模拟,分析了湖泊、连接河流与湖泊的急弯对河道洪水的影响。Shrestha 和 Kawasaki^[15]利用 HEC

-RAS 软件,对缅甸的巴戈河流域防洪风险及大坝建筑物对流域防洪影响进行了模拟研究。Chao 等^[16]利用 TELEMAC - MASCARET 软件,基于有限元方法,分析了厦门岛洪水风险影响因素。

由于桥墩尺寸较小,使得模型网格划分尺度过小,计算耗时过长,基于数值模拟方法开展桥梁工程防洪风险评价较为困难。因此,虽然部分研究人员已经开展防洪风险数值模拟研究,但多是针对河道洪水、溃坝洪水及城市洪水等大范围计算域的防洪风险进行模拟研究,利用数值模拟方法开展桥梁工程防洪风险评价的相关研究较为稀少。

本研究基于有限体积方法,结合自适应网格加密方法,建立桥梁工程防洪风险评价模型。模型计算精度,通过将溃坝算例模型计算水位和流速与解析解对比进行验证。然后,利用数值模型,对某桥梁工程建设前后河道行洪流场进行计算,分析桥梁工程对河道行洪影响,评价桥梁工程防洪风险,为类似桥梁工程防洪风险评价提供理论和技术参考。

1 数值模型

1.1 控制方程

模型控制方程为二维浅水方程^[17]:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial hv}{\partial y} = q \quad (1)$$

$$\frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right) + \frac{\partial huv}{\partial y} = gh(S_{fx} + S_{ox}) \quad (2)$$

$$\frac{\partial hv}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right) + \frac{\partial huv}{\partial x} = gh(S_{fy} + S_{oy}) \quad (3)$$

$$S_{ox} = -\frac{\partial z_b}{\partial x}, S_{oy} = -\frac{\partial z_b}{\partial y} \quad (4)$$

$$S_{fx} = -\frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}, S_{fy} = -\frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \quad (5)$$

式中: u 、 v 表示 x 、 y 方向流速; t 表示时间; g 为重力加速度; h 为水深; q 为流量; S_{ox} 、 S_{oy} 为 x 、 y 方向底坡源项; S_{fx} 、 S_{fy} 为 x 、 y 方向摩擦源项。

1.2 方程离散

对连续性方程采用有限体积积分数值方法进行离散以保证格式的守恒性。二维浅水方程具有旋转不变特性,因此将动量方程在单元法向和边构成的局部坐标系下进行离散,方程离散详见文献[18]。

将式(1)一式(3) 写为如下形式:

$$U_t + E(U)_x + H(U)_y = S(U) \quad (6)$$

式中:下标 t, x, y 表示一阶导数。

$$U = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 0 \\ s_x \\ s_y \end{bmatrix} \quad (7)$$

守恒变量平均值储存于单元中心,同时将每个单元边作为控制体表面,式(6)可写为:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla F = S(U) \quad (8)$$

式中: $F = (E, H)$ 。

将式(8)进行积分,并利用单元边上通量矢量近似表面积分进行离散可得:

$$\int_{\partial V} F \cdot \mathbf{n} ds = \sum_{j=1}^{N_e} F_{ij} \Delta l_{ij} \quad (9)$$

式中: ∂V 为单元 V 的边界; \mathbf{n} 为边界上的单位法向量; Δl_{ij} 表示单元 V_i 第 j 条边的长度; F_{ij} 为通过边 l_{ij} 的数值通量; N_e 代表单元 V_i 的边编号。

通量 F_{ij} 通过 Roe 近似解计算:

$$F_{ij} = F \left[(U_L)_{ij}, (U_R)_{ij} \right] = \frac{1}{2} \left\{ \left[F(U_R)_{ij} + F(U_L)_{ij} \right] \cdot \mathbf{n} - |\mathbf{A}| \left[(U_R)_{ij} - (U_L)_{ij} \right] \right\} \quad (10)$$

式中: \mathbf{A} 为 Roe 平均获得的通量雅可比矩阵。

利用特征值方法,式(10)数值通量可表达为:

$$F \left[(U_L)_{ij}, (U_R)_{ij} \right] = \frac{1}{2} \left\{ \left[F(U_R)_{ij} + F(U_L)_{ij} \right] \cdot \mathbf{n} - \left(\sum_{k=1}^3 |\alpha_k| \alpha_k \mathbf{e}_k \right)_{ij} \right\} \quad (11)$$

式中: α_k 为特征值; \mathbf{e}_k 为特征向量。

$$\alpha_1 = \frac{\Delta h}{2} + \frac{1}{2c} \left[\Delta(hu)n_x + \Delta(hv)n_y - (un_x + vn_y)\Delta h \right]$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{c} \left\{ \left[\Delta(hv) - v\Delta h \right] n_x - \left[\Delta(hu) - u\Delta h \right] n_y \right\}$$

$$\alpha_3 = \frac{\Delta h}{2} - \frac{1}{2c} \left[\Delta(hu)n_x + \Delta(hv)n_y - (un_x + vn_y)\Delta h \right] \quad (12)$$

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ u + cn_x \\ v + cn_y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 - cn_y \\ cn_x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ u - cn_x \\ v - cn_y \end{bmatrix} \quad (13)$$

式中: u, v, c 为 Roe 平均速度。

1.3 网格划分

由于桥梁支撑结构的桥墩尺寸相对桥梁尺度而

言较小,如采用均匀网格进行划分,计算域内网格数量将极为巨大,造成计算耗时过长,无法进行工程应用。因此,采用自适应网格加密技术对桥墩附近网格进行加密,河道范围大面积计算域采用较大网格尺度,从而大幅降低计算域内网格数量,提高计算效率。模型网格采用 Delaunay 网格剖分方法,该方法采用相关准则在平面散点集的凸集上进行三角剖分。Delaunay 网格剖分方法分布较为灵活、能够适应复杂边界,并能够适应局部任意加密。网格生成的第一步是初始网格的建立,先构造一个超三角形,该三角形需包含所有边界点;然后根据设定的网格尺度细化边界,得到初始边界离散点;再采用算法将各边界点逐点依次插入超三角形;再进行边界的恢复,并删除计算区域外三角形,得到正确的初始三角剖分。第二步是进行初始网格的细化,采用 Bowyer-Watson 方法,按一定算法生成内点,使网格满足一定的划分要求为止。最后,进行生成网格的光滑化和拓扑优化,完善网格。详细网格剖分过程见文献[19]。

2 模型验证

采用光滑渠道溃坝算例^[20],将模型计算水位、流速值与解析解进行对比验证模型计算精度。水平渠道断面为矩形,长 50 m,宽 5 m,高 2 m。渠道侧壁及底部表面光滑无摩擦。初始时刻渠道上半段水位为 1 m,渠道下游水位为 0.1 m,初始流速均为 0。假定渠道中间断面存在一个闸门,该闸门在初始时刻瞬时移除。为了进行加密网格的计算精度分析,分别采用 0.5 m, 0.1 m 和 0.5 m + 0.1 m 网格尺度进行生成计算网格,其中 0.5 m + 0.1 m 网格为上半渠道网格尺度设定为 0.5 m,下半渠道网格尺设定为 0.1 m(见图 1 ~ 图 3)。网格数量分别为 2 406、58 314 和 31 634。图 3 中下游 0.1 m 网格逐渐向上游过渡,距离渠道中间断面一定范围后将过渡到上游 0.5 m 尺度网格。时间步长为 0.01 s,计算步数为 200。

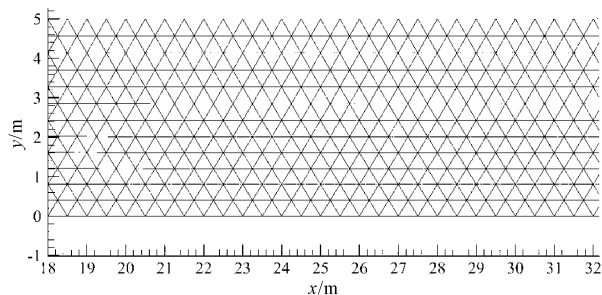


图1 模型网格(0.5 m)

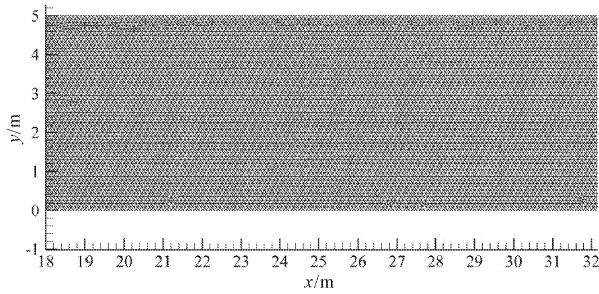


图 2 模型网格(0.1 m)

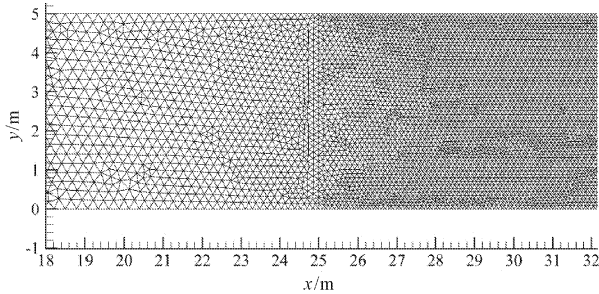


图 3 模型网格(0.5 m + 0.1 m)

溃坝后 2 s 的模型计算水位及流速与解析解对比见图 4。图中, 网格尺度 0.5 m 时计算结果与解析解存在较大误差; 而网格尺度 0.1 m 及 0.5 m + 0.1 m 的模型计算结果基本一致, 与解析解吻合较好。图 5 给出了 0.5 m + 0.1 m 网格模型计算水位和流速云图, 从图中可知, 模型计算结果较为光滑, 不同水位和流速间过渡极为清晰。总之, 采用网格加密方式, 能够在降低网格数量的同时, 维持较高的计算精度。

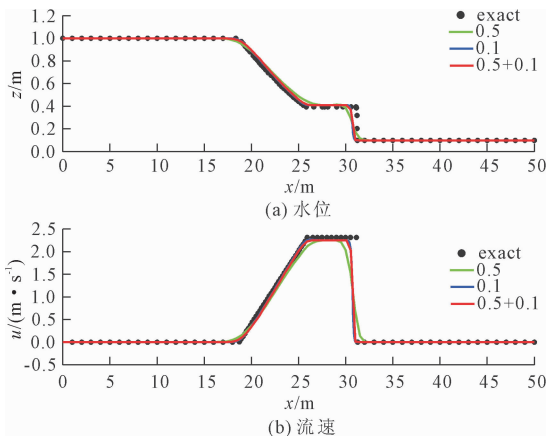


图 4 数值计算水位及流速与解析解对比

3 桥梁工程防洪风险分析

3.1 工程概况

某桥梁工程为跨越一河流而设, 涉及到河道管

理范围, 需进行防洪影响评价。新建桥梁为曲线桥, 结构型式为预应力混凝土简支 T 梁, 桥梁全长为 505.4 m, 桥梁的梁底高程 541.01 m ~ 540.94 m。新建桥梁的轴线与河道水流方向的夹角为 70° ~ 90°。桥梁平面布置见图 6。新建桥梁设计标准为百年一遇洪水, 流量为 4 410 m³/s。桥梁施工期洪水标准按 20 年一遇设计, 流量为 1 970 m³/s。桥梁下部支承结构为单线圆端型混凝土桥墩, 墩身为等截面设计, 墩身尺寸 4 m × 2 m (横向 × 纵向)。桥墩基础为 1.0 m 钻孔桩, 桥台基础为 1.25 m 钻孔桩, 按摩擦桩设计。

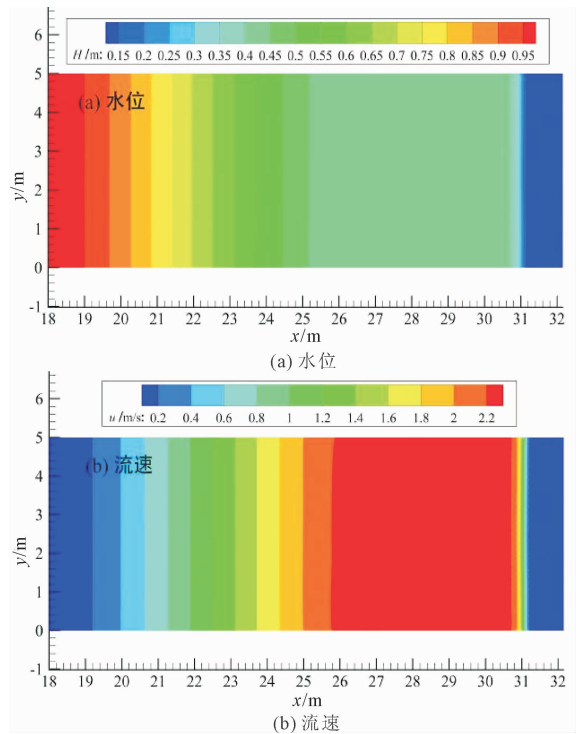


图 5 数值计算水位和流速云图



图 6 桥梁平面布置图

3.2 模型布置

为了分析桥梁对河道行洪影响,评价桥梁防洪风险,需分别建立天然河道模型(Model 1)和桥梁建设后的新建桥梁模型(Model 2)。Model 1 网格尺度为 10 m, Model 2 大范围河道网格尺度为 10 m, 桥墩周围网格尺度为 2 m, 模型网格见图 7。图中, Model 1 模型网格较为均匀, 均为 10 m 尺寸; Model 2 桥梁周围网格尺寸较小, 并沿远离桥墩方向逐渐增大, 并逐渐过渡为 10 m 网格尺寸。

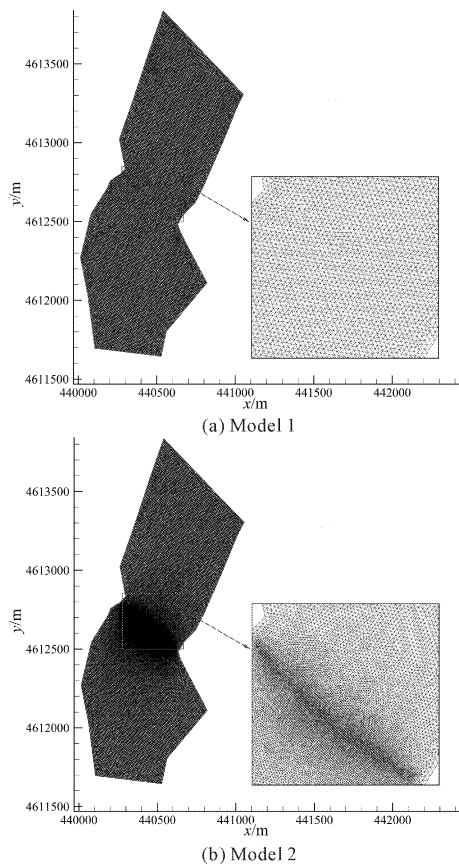


图 7 模型网格

图 8 为 Model 1 和 Model 2 模型地形及断面位置图。模型时间步长为 1.8 s, 初始水位 539.78 m, 糙率 0.025。分别考虑施工和设计流量工况, 模型上游入流边界分别为 4 410 m³/s 和 1 970 m³/s, 对应下游出水水位边界分别为 538.4 m 和 537.6 m。断面 1 和断面 2 分别为新建桥梁上游和下游断面。

3.3 计算结果分析

图 9 和图 10 给出了 20 年一遇和百年一遇流量条件下数值计算水位和流速场。

20 年一遇流量 Model 1 和 Model 2 桥梁周围水位相差不大, 水位 539 m 左右; Model 1 桥梁位置周

围流速 2.6 m/s 左右, Model 2 桥梁建成后, 桥墩周围由于桥墩影响流速降低, 桥墩间流速增大, 最大流速约为 3.1 m/s。百年一遇流量 Model 1 和 Model 2 桥梁周围水位同样相差不大, 水位 540 m 左右, 较 20 年一遇水位提高约 1 m; Model 1 桥梁位置周围流速约为 3.5 m/s, Model 2 桥梁建成后, 桥墩周围流速同样有所降低, 桥墩间流速增大, 最大流速约为 4.1 m/s。

为了定量分析桥梁防洪风险, 表 1 和表 2 给出了设计和施工期流量标准条件下断面 1 和断面 2 平均水位和流速。20 年一遇和百年一遇流量下 Model 2 相较 Model 1 断面水位抬升较少, 提高约 0.1 m ~ 0.2 m; 桥梁上下游最高水位在百年一遇 Model 2 断面 1 位置达到, 最高水位 540.7 m 小于桥梁底部最低高程 540.94 m。Model 1 断面流速较大, 桥梁建成后, 由于桥梁雍水使得河道水位提高, 断面流速降低; 20 年一遇流量下流速降低较小, 降低值为 0.13 m/s ~ 0.14 m/s; 百年一遇流量下流速降低较大, 降低值为 0.17 m/s ~ 0.23 m/s。

总之, 桥梁建成后桥墩附近流速降低, 桥墩间流速增大, 增大值约 0.5 m/s 左右; 桥梁建成后由于桥梁雍水, 使得桥梁上下游断面流速降低, 降低值约 0.13 m/s ~ 0.23 m/s; 桥梁建成后河道水位稍有抬升, 设计洪水标准条件下最高水位 540.7 m, 低于桥梁底部最低高程, 满足河道防洪要求。

表 1 数值计算水位值 单位: m

位置	20 年一遇		百年一遇	
	Model 1	Model 2	Model 1	Model 2
断面 1	539.4	539.5	540.5	540.7
断面 2	539.3	539.4	540.4	540.5

表 2 数值计算流速值 单位: m/s

位置	20 年一遇		百年一遇	
	Model 1	Model 2	Model 1	Model 2
断面 1	2.06	1.92	2.96	2.73
断面 2	2.08	1.95	3.03	2.86

4 结论

(1) 利用有限体积方法, 结合 Delaunay 网格剖分方法, 进行自适应网格加密, 建立桥梁工程防洪风险评价模型, 从而降低网格数量和计算耗时, 以克服桥梁基础尺寸较小, 数值模型网格尺度过小, 网格规模过大, 计算耗时过长的问题。

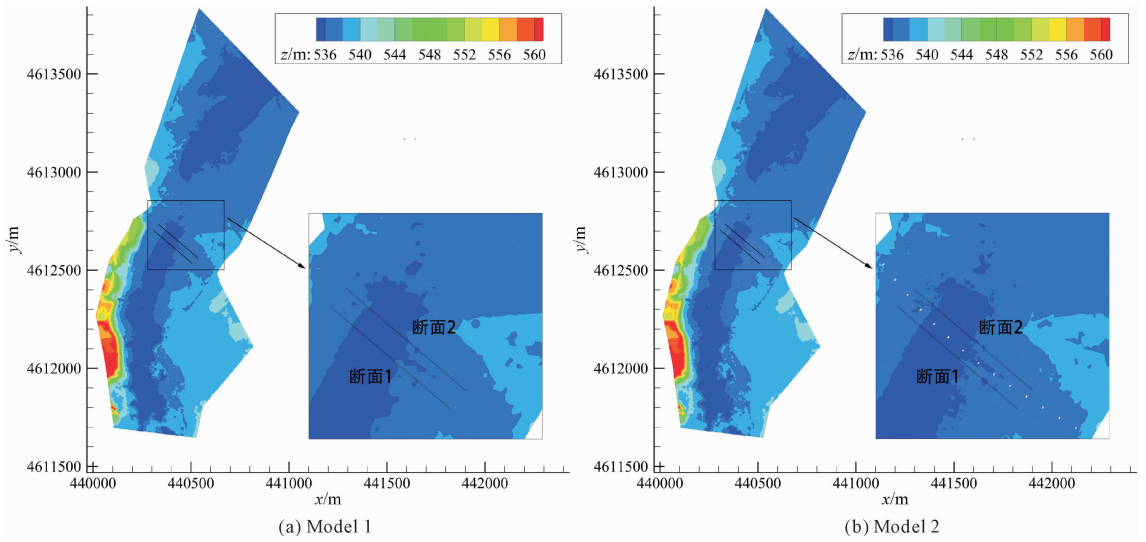


图 8 模型与断面位置

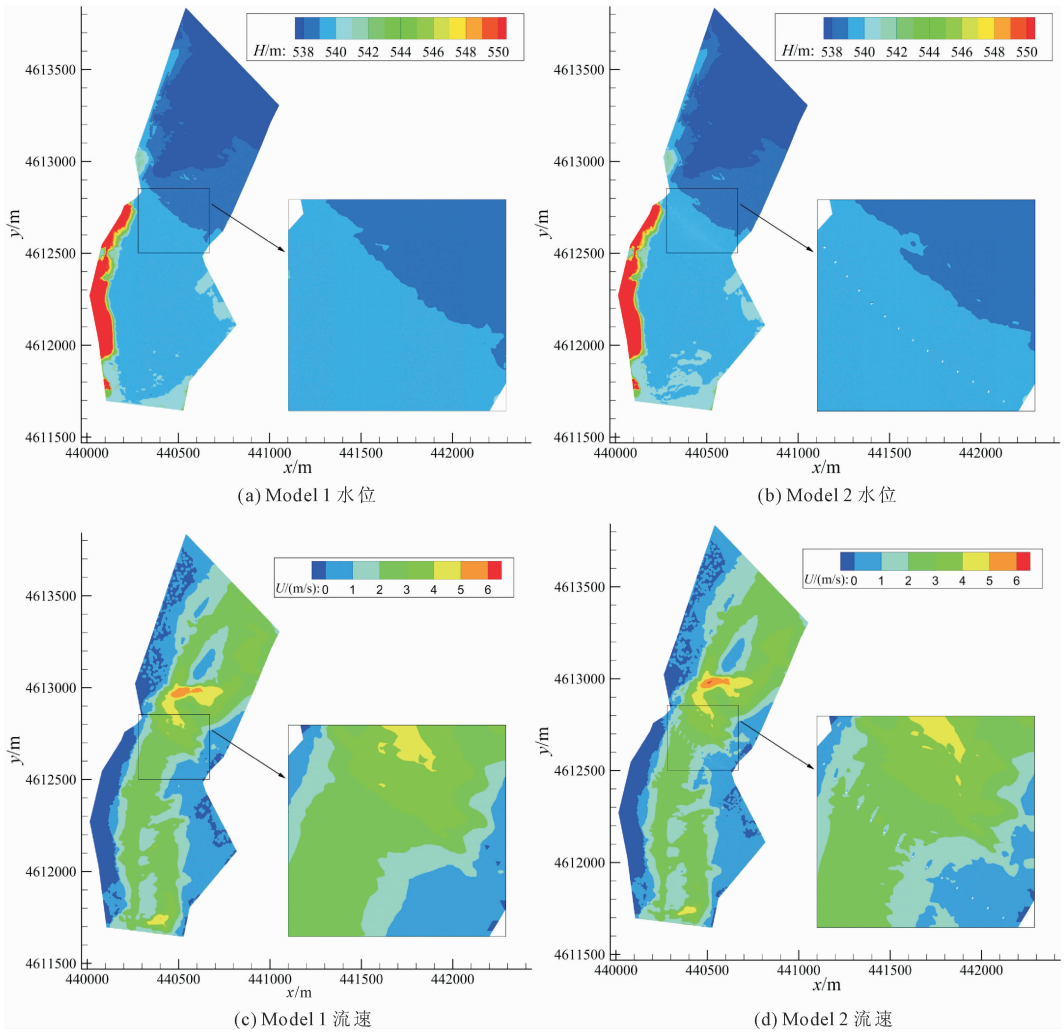


图 9 20 年一遇计算云图

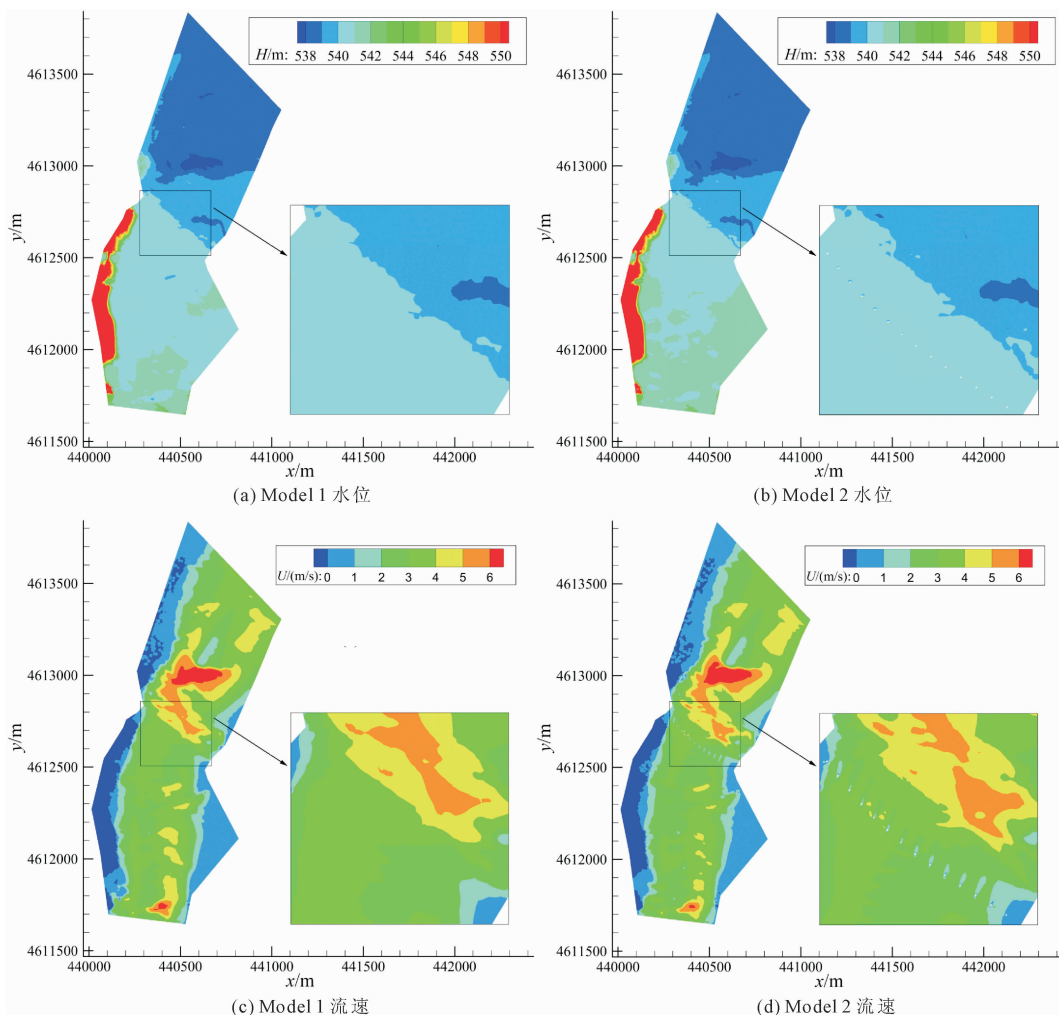


图10 百年一遇计算云图

(2) 通过无障碍溃坝算例,将不同网格尺度和网格加密模型计算水位和流速结果与解析解对比,验证了均匀网格和加密网格模型计算精度。采用局部网格加密方式,使网格数量得到减少,同时计算结果较为光滑,且与解析解吻合较好,保持了较高的计算精度。

(3) 利用数值模型,计算某桥梁工程建设前后河道行洪流场,分析评价桥梁工程的防洪风险,桥梁工程的建设会使桥墩附近流速由于桥墩壁面拖曳而降低,桥墩间流速由于断面缩窄而增大,桥梁工程的建设还会造成桥梁上下游断面流速由于桥墩雍水、水位升高而降低,对本文研究工程设计洪水标准下流速降低约 0.2 m/s 。同时,桥梁工程会造成河道水位抬升,对于本文研究对象设计洪水标准条件下桥梁上下游断面水位最大抬升为 0.2 m ,桥梁建成后最高水位为 540.7 m ,低于桥梁底部最低高程 540.94 m ,能够满足河道防洪要求。本研究能够为

类似桥梁工程防洪风险评价提供技术参考。

参考文献:

- [1] 王宏伟,余建星,谢忠伟. 基于模糊随机理论的桥梁防洪风险概率分析[J]. 自然灾害学报,2009,18(3):60-64.
- [2] 汪哲荪,金菊良,魏一鸣,等. 三角模糊数随机模拟的防洪工程系数风险评价模型[J]. 水利学报,2010,41(10):1173-1178.
- [3] 薛志春,游进军,蒋云钟. 基于可变集理论的流域防洪风险评价[J]. 黑龙江大学学报,2019,10(2):6-14.
- [4] 兰盈盈,崔新颖. 水库大坝防洪风险评价及入库洪水随机模拟[J]. 东北水利水电,2011,2(28):48-50.
- [5] Chen J, Zhong P A, Zhang W, et al. Improved risk-assessment model for real-time reservoir flood-control operation[J]. Journal of Water Resources Planning and Management, 2020,146(3):04020007.
- [6] Wang Q S, Zhou J Z, Dai L, et al. Risk assessment of

- multireservoir joint flood control system under multiple uncertainties [J]. *Journal of Flood Risk Management*, 2021, 14: e12740.
- [7] Li G F, Xiang X Y, Tong Y Y, et al. Impact assessment of urbanization on flood risk in the Yangtze River Delta [J]. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 2013, 27(7): 1683-1693.
- [8] Wu S J, Yang J C, Tung Y K. Risk analysis for flood-control structure under consideration of uncertainties in design flood [J]. *Natural Hazards*, 2011, 58(1): 117-140.
- [9] Dou X Y, Song J X, Wang L P, et al. Flood risk assessment and mapping based on a modified multi-parameter flood hazard index model in the Guanzhong Urban Area, China [J]. *Stochastic Environmental Research & Risk Assessment*, 2018, 32(4): 1131-1146.
- [10] Lyu H M, Shen S L, Zhou A, et al. Perspectives for flood risk assessment and management for mega-city metro system [J]. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 2019, 84: 31-44.
- [11] Pelletier J D, Mayer L, Pearthree P A, et al. An integrated approach to flood hazard assessment on alluvial fans using numerical modeling, field mapping, and remote sensing [J]. *Geological Society of America Bulletin*, 2005, 117(9): 1167-1180.
- [12] Qi H, Altinakar M S. A GIS-based decision support system for integrated flood management under uncertainty with two dimensional numerical simulations [J]. *Environmental Modelling & Software*, 2011, 26(6): 817-821.
- [13] Li C C, Cheng X T, Li N, et al. A framework for flood risk analysis and benefit assessment of flood control measures in urban areas [J]. *International Journal of Environmental Research and Public Health*, 2016, 13(8): 787(1-18).
- [14] Tang H W, Cao H, Yuan S Y, et al. A numerical study of hydrodynamic processes and flood mitigation in a large river-lake system [J]. *Water Resources Management*, 2020, 34(12): 3739-3760.
- [15] Shrestha B B, Kawasaki A. Quantitative assessment of flood risk with evaluation of the effectiveness of dam operation for flood control: a case of the Bago River Basin of Myanmar [J]. *International Journal of Disaster Risk Reduction*, 2020, 50: 101707.
- [16] Mei C, Liu J H, Wang H, et al. Urban flood inundation and damage assessment based on numerical simulations of design rainstorms with different characteristics [J]. *Science China, Technological Sciences*, 2020, 63(11): 2292-2304.
- [17] 林金波, 金生, 丁伟业. 基于 HydroInfo 软件的溃坝水流模拟 [J]. *水利与建筑工程学报*, 2015, 13(6): 113-117.
- [18] Wang Z L, Geng Y F, Jin S. An unstructured finite volume algorithm for nonlinear two dimensional shallow water equation [J]. *Journal of Hydrodynamics (Ser. B)*, 2005, 17: 306-312.
- [19] 柏禄海. 浅水方程高分辨率算法的研究 [D]. 大连: 大连理工大学, 2013.
- [20] Chang T J, Kao H M, Chang K H, et al. Numerical simulation of shallow-water dam break flows in open channels using smoothed particle hydrodynamics [J]. *Journal of Hydrology*, 2011, 408: 78-90.