

# 仿真混凝土动弹性模量的悬臂梁法试验研究

商越, 张昱, 冯新, 任显祺, 张浩杰

(大连理工大学 海岸和近海工程国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

**摘要:** 仿真混凝土是动力模型试验常用的材料, 准确地测定其动态弹性模量对模型设计、数值分析等意义重大。在以往的研究中通常采用悬臂梁法测定仿真混凝土的动弹性模量, 但该方法没有规范作为支撑, 其准确性与适用性存疑。在传统的测定方法的基础上考虑了对经典梁模型的修正和基座变形导致的非完全固支效应的影响, 以规范中的自由梁法测定的动弹性模量为基准值, 对基于悬臂梁法测定仿真混凝土动弹模的适用性进行了研究。结果表明: 试验结果与理论及数值分析的结果之间仍存在一定的差异; 试验测得的1阶共振频率低于数值分析的结果, 且差值随着试件长高比或长细比增大而减小; 试验测得的2阶和3阶的共振频率则均高于数值分析结果。因此, 通过悬臂梁法准确地测定仿真混凝土的动态弹性模量试件长高比则至少为7(长细比为24.2)。

**关键词:** 仿真混凝土; 动态弹性模量; 自由梁法; 悬臂梁法; 数值模拟

中图分类号: TV41

文献标识码: A

文章编号: 1672-1144(2022)03-0035-06

## Experimental Research for Testing Dynamic Young's Modulus of Simulation Concrete

SHANG Yue, ZHANG Yu, FENG Xin, REN Xianqi, ZHANG Haojie

(State Key Lab of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, China)

**Abstract:** Simulation concrete is a common material in dynamic model test. Accurate determination of its dynamic Young's modulus is of great significance to model design and numerical analysis. In previous studies, the cantilever beam method is usually used to measure the dynamic Young's modulus of simulation concrete, but this method is not supported by any standard, and its accuracy and applicability need further discussion. Based on the traditional measurement method, the correction of the classical beam model and the influence of the incomplete fixed support effect caused by the base deformation are considered. Taking the dynamic Young's modulus measured by the free-free beam method in the standard as the reference value, the applicability of the cantilever beam method to measure the dynamic Young's modulus of simulation concrete is analyzed. The results show that there are still some differences between the experimental results and the results of theoretical and numerical analysis. The first-order resonance frequency measured in the test is lower than that of the numerical analysis, and the difference decreases with the increase of the length-height ratio or slenderness ratio. The resonance frequencies of order 2 and 3 are higher than the numerical analysis results. The results show that in order to accurately determine the dynamic Young's modulus of simulation concrete by cantilever beam method, the length-height ratio of the specimen is at least 7 (with the slenderness ratio of 24.2).

**Keywords:** simulation concrete; dynamic Young's modulus; free-free beams test method; cantilever beams test method; numerical simulation

在大坝等大型水工结构的动力模型试验中,模型与原型的比尺通常高达几十分之一到几百分之一,为了使模型结构能够满足全过程结构模型动力相似的试验要求,模型材料须具有较低的弹性模量和合适的密度,且脆性和断裂特性应与原型材料相近。经过多年的发展,逐渐出现了一种以水泥、重晶砂、重晶石粉、矿石粉、速凝剂等材料配合产生的混凝土仿真材料,称作仿真混凝土<sup>[1]</sup>。仿真混凝土材料与普通混凝土的动态拉伸性能相似<sup>[2]</sup>,但比后者具有更高的密度、更低的弹性模量和抗拉、抗压强度。

在结构动力模型试验的设计阶段,掌握模型材料的动态弹性模量至关重要。这一方面是因为原型和模型材料的动弹模之间的比尺对确定其相似关系非常关键,是决定模型设计最终结果的要素之一;另一方面对于模型试验中诸如数值仿真等其它工作,动弹模也是必要的信息之一。

混凝土材料动弹模的测定通常通过超声脉冲法和共振法等非破坏性试验方法实现。仿真混凝土散料较为干松,振捣后表面易形成气孔。超声脉冲法对试件表面的平整度有较为严格的要求,因此这种方法对仿真混凝土并不适用。共振法按照支承方式的不同分为自由梁共振法和悬臂梁共振法。自由梁法有成熟的规范作为依据<sup>[3-6]</sup>,因此在普通混凝土动弹模测定中有较好的应用。然而自由梁法不适用于仿真混凝土材料动弹模的测定,因为这种材料强度较低且密度较大,在测定过程中的移动、敲击可能在较大的自重影响下,导致试件表面的损坏和整体断裂。在这种情况下,通过悬臂梁法测定仿真混凝土材料的动弹性模量是较为可行的方案。

悬臂梁法在木材、金属等韧性较好的材料的动弹性模量测量中均有较广的应用<sup>[7-9]</sup>,也有学者将其应用于混凝土材料动弹模的测量中<sup>[10-11]</sup>。文献[12-15]将仿真混凝土试件与普通混凝土基座浇筑实现了悬臂梁,并使用悬臂梁法测定了仿真混凝土的动弹性模量。然而悬臂梁法没有统一的规范作为依据,通过该方法测量仿真混凝土的动弹性模量的准确性和适用性仍然存疑。

本文将通过自由梁法测得的仿真混凝土动弹模结果作为基准值,对仿真混凝土悬臂梁的弯曲共振进行了分析。通过对比自由梁、悬臂梁试验数据和数值模拟数据得到了规律性的结果,并在悬臂梁试验中基于铁木辛柯梁与欧拉-伯努利梁的模型差异和非完全固支效应的影响,对其结果进行了修正,提

高了计算结果的准确性。

## 1 试验设计

### 1.1 试件制备

在自由梁试验中,本文参考规范 ASTM C215—19<sup>[6]</sup>,制备尺寸为 100 mm × 100 mm × 400 mm 的仿真混凝土标准试件,通过自由梁的冲击共振法测量动态弹性模量  $E_d$  和动态剪切刚度模量  $G_d$ ,并将其作为参考值和数值模拟的预设参数。在悬臂梁试验中,为了研究悬臂梁法测量仿真混凝土材料动弹性模量的实用性,探讨试件尺寸对测量结果的影响,试验设计了 3 组悬臂梁试件、1 组自由梁,共 4 个工况分组,如表 1 所示。

表 1 自由梁、悬臂梁试验工况设置

试验类型	工况组别	截面尺寸/mm ( $b \times h$ )	试件长度/mm			冲击方向
悬臂梁 试验	C1	100 × 100	400	600	800	y 向
	C2	50 × 50	200	300	400	y 向
	C3 - b	100 × 50	200	300	400	y 向
	C3 - h	100 × 50	200	300	400	x 向
自由梁 试验	F	100 × 100	400	400	400	—

在普通混凝土基座上预留了深度为 200 mm 的槽,浇筑仿真混凝土以形成悬臂梁,如图 1 所示。

仿真混凝土材料由重晶砂、重晶石粉、矿石粉、水泥、水和外加剂按照表 2 的配比配制。其中,重晶砂的粒径范围为 1.0 mm ~ 2.5 mm,重晶石粉的粒径范围为 0.0 mm ~ 0.6 mm,矿石粉为 325 目石灰石粉,水泥为 P. C 42.5 复合硅酸盐水泥。试件自浇筑后在模具中养护 24 h 后拆模,并继续在平均温度 10℃、平均湿度 60% 的空气中养护 24 h。制备的仿真混凝土试件密度为 2 950 kg/m<sup>3</sup>。

表 2 仿真混凝土材料配比

组分	重晶 石砂	重晶 石粉	矿石粉	水泥	水
质量 比例/%	46.5	33.5	10.5	2.0	7.5

注:另外添加水泥质量的 0.2% 的外加剂。

### 1.2 试验方案

#### 1.2.1 自由梁试验

自由梁试验过程参考美国规范 ASTM C215—19 中的冲击共振法,弯曲共振试验的流程为:(1)将尺寸  $b \times h \times l$  为 100 mm × 100 mm × 400 mm 的标

准试件在下表面的  $0.224l$  和  $0.776l$  处(1 阶弯曲共振节点)支承;(2) 在上表面距离一端  $5\text{ mm}$  处固定加速度传感器,拾振方向与弯曲共振方向一致,并将传感器、采集盒、电脑连接并保证测量系统处于工作状态;(3) 敲击试件上表面中部,激起其 1 阶弯曲共振模态,采集振动的加速度时程。

扭转共振试验的流程为:(1) 在标准试件底部,沿横向的中心位置(1 阶扭转共振节点)固定试件;(2) 在距离试件一端  $0.224l$  长,距离上表面  $h/6$  处固定加速度传感器,并将传感器、采集盒、电脑连接并保证测量系统处于工作状态;(3) 在距离试件另一端  $0.13 \pm 0.01l$ ,距离底面  $h/6$  处敲击试件,激起其 1 阶扭转振动模态,并采集振动的加速度时程。

### 1.2.2 悬臂梁试验

悬臂梁法测点布设示意图如图 2 所示。悬臂梁试验的流程为:(1) 在从固定端到自由端长度分别为  $0.5l$ 、 $0.7l$  处和距自由端  $5\text{ mm}$  处(分别为 2 阶、3 阶和 1 阶横振的振幅较大处)固定加速度传感器;(2) 将传感器、采集盒、电脑连接并保证测试系统处于工作状态;(3) 分别使用木槌敲击试件的  $0.5l$ 、 $0.7l$  和距自由端  $5\text{ mm}$  处,激起试件前三阶弯曲振动模态。

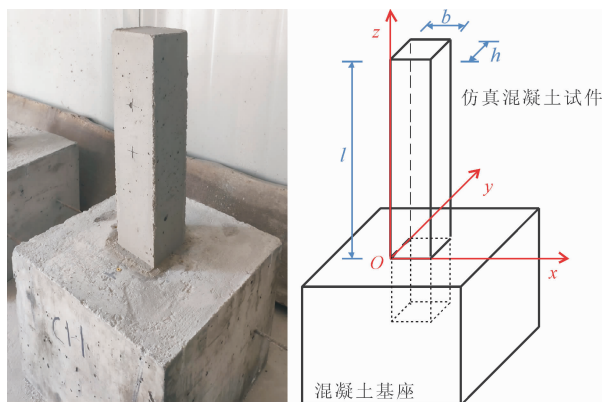


图 1 悬臂梁试件

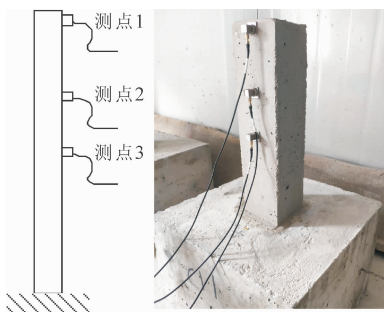


图 2 悬臂梁法测点布设示意图

### 1.3 数据处理

基于欧拉 - 伯努利 (Euler - Bernoulli) 梁的振动微分方程,有悬臂条件下动弹性模量的计算公式:

$$E_d = \frac{(2\pi f_{n,E-B})^2 \bar{m} l^4}{(\beta_n l)^4 I} \quad (1)$$

式中: $E_d$  是动弹性模量,Pa; $f_{n,E-B}$  是第  $n$  阶的欧拉 - 伯努利线频率,Hz; $\bar{m}$  是材料的线密度,kg/m; $l$  是试件的悬臂长度,m; $\beta_n l$  是第  $n$  阶的频率系数,由频率方程  $\cos\beta l \cdot \cosh\beta l + 1 = 0$  通过图解法解得。

欧拉 - 伯努利梁模型过于理想化,忽略了剪切变形和转动惯量的影响,因此式 (1) 仅适用于细长梁<sup>[8,16-17]</sup>,对于短而粗的梁或高阶模态,该公式会带来相当大的误差<sup>[17]</sup>。美籍俄裔科学家铁木辛柯于 1921 年<sup>[19]</sup>提出了考虑了剪切变形和转动惯量的铁木辛柯梁模型。Sutherland 等<sup>[20]</sup>基于铁木辛柯梁振动微分方程提出了关于欧拉 - 伯努利梁的频率系数  $\beta_n l$  的修正系数  $D_n$ ,该修正系数是细长比  $r/L$ 、弹性模量和剪切模量比  $E/\lambda G$  和模态阶数  $n$  的函数,其中  $\lambda$  是切变系数,对于矩形截面取  $5/6$ 。

通过式 (2) 便可计算频率修正系数和修正的频率:

$$f_{n,Tim} = C_{n,f} \cdot f_{n,E-B} = \left(\frac{D_n}{\beta_n l}\right)^2 f_{n,E-B} \quad (2)$$

式中: $f_{n,Tim}$ 、 $f_{n,E-B}$ 、 $C_{n,f}$  分别为第  $n$  阶的铁木辛柯梁频率,欧拉 - 伯努利梁频率和频率修正系数。

由试验测得的悬臂梁固有频率  $f_s$  和数值模拟的结果  $f_s$  都更接近于铁木辛柯梁频率  $f_{Tim}$ ,因此通过试验测得悬臂梁弯曲振动的固有频率  $f_s$  后便可以通过式 (3) 计算修正后的动弹性模量。

$$E_d = \frac{(2\pi f_{n,e}/C_{n,f})^2 \bar{m} l^4}{(\beta_n l)^4 I} \quad (3)$$

## 2 试验结果与分析

### 2.1 自由梁法与修正系数

通过自由梁法测得试件的弯曲共振频率和扭转共振频率,并计算动态弹性模量和动态剪切刚度模量的基准值如表 3 所示。将试验结果取均值得到动弹性模量  $E_d$  的基准值为  $1\ 181.67\text{ MPa}$ ;动剪切刚度模量  $G_d$  的基准值为  $445.67\text{ MPa}$ ;动泊松比  $\mu_d$  为  $0.326$ 。根据自由梁法测得的基准值绘制修正系数关于细长比  $r/L$  和模态阶数  $n$  的曲线,如图 3 所示。可以看到随着振动阶次的增加和试件细长比的增大,修正系数随之减小。

表 3 自由梁法测定结果

试件编号	弯曲共振频率 $f_E/\text{Hz}$	扭转共振频率 $f_C/\text{Hz}$	动弹性模量 $E_d/\text{MPa}$	动剪切刚度模量 $G_d/\text{MPa}$	动泊松比 $\mu_d$
F-1	355	457	1240.00	462.00	0.342
F-2	347	453	1190.00	456.00	0.305
F-3	335	433	1115.00	419.00	0.331
	均值		1181.67	445.67	0.326

## 2.2 等效悬臂长度

理想的悬臂条件是难以实现的,由于混凝土基座的刚性并不是无限大的,因此基座与试件协同振动造成的非完全固支效应则不可忽视。

为了研究试验所采用的悬臂条件与理想悬臂条件间存在的差异,在有限元软件中分别模拟了两种固支条件如图 4 所示。

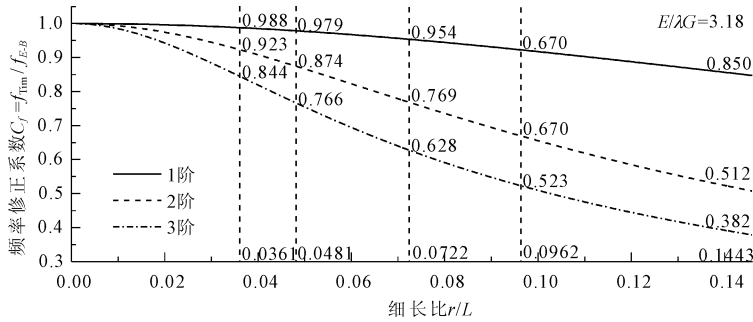


图 3 悬臂梁法的频率修正系数

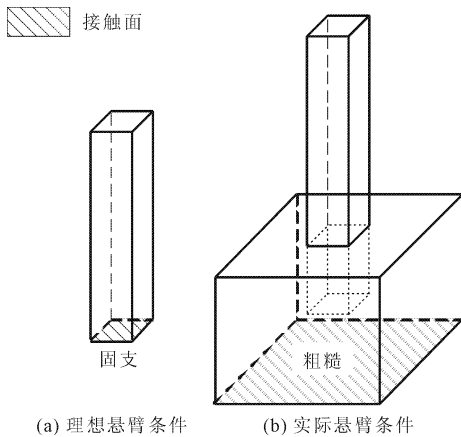


图 4 数值分析模型示意图

根据动弹性模量的计算公式(1)得知,假设试件弹性模量、截面尺寸不变时,有如下的关系式:

$$l_b = \sqrt{\frac{f_a}{f_b}} \cdot l_a \quad (4)$$

其中: $l_b$  是实际固支条件下的试件等效悬臂长度, $l_a$  是理想固支条件下的试件长度,而  $f_a$ 、 $f_b$  分别为理想和实际悬臂条件下数值模拟的频率。通常情况下  $l_b$  的值大于  $l_a$ , 当以  $l_b$  取代  $l_a$  作为计算长度时,相当于对动弹模计算值的放大,放大系数  $C_1$  可以写为  $C_1 = (l_b/l_a)^4$ 。计算各工况下各长度的放大系数值,列为表 4。可以看到,随着试件长度的增加或振型阶次的增大,放大系数  $C_1$  随之降低。放大系数  $C_1$  越大则意味着非完全固支效应越明显。

表 4 不同工况与试件长度等效悬臂长度放大系数  $C_1$ 

模态阶数	不同长度下放大系数 $C_1$											
	C1			C2			C3-b			C3-h		
	0.4 m	0.6 m	0.8 m	0.2 m	0.3 m	0.4 m	0.2 m	0.3 m	0.4 m	0.2 m	0.3 m	0.4 m
1 阶	1.095	1.067	1.051	1.072	1.051	1.039	1.103	1.073	1.056	1.122	1.091	1.072
2 阶	1.062	1.049	1.041	1.048	1.037	1.031	1.072	1.054	1.044	1.082	1.057	1.048
3 阶	1.057	1.041	1.034	1.523	1.034	1.026	1.024	1.050	1.038	1.050	1.062	1.043

## 2.3 悬臂梁试验

在悬臂梁试验中,用木槌多次敲击测量点,取波形时程中一个单脉冲,计算自功率谱如图 5 所示,并拾取前 3 阶共振频率。

将试验测得的试验频率修正至欧拉-伯努利频

率后,将等效悬臂长度作为计算长度,计算了各工况下前三阶频率对应的动态弹性模量。

## 2.4 悬臂梁试验结果讨论与分析

将试验测得的前三阶固有频率与数值分析的结果作对比,如图 6 所示。

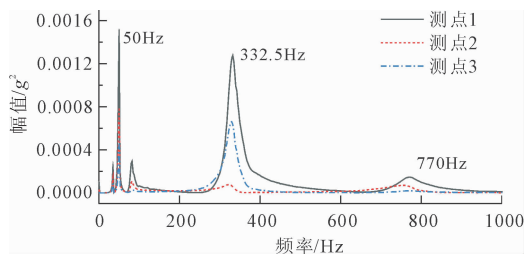


图5 C1 工况 400 mm 试件弯曲共振功率谱

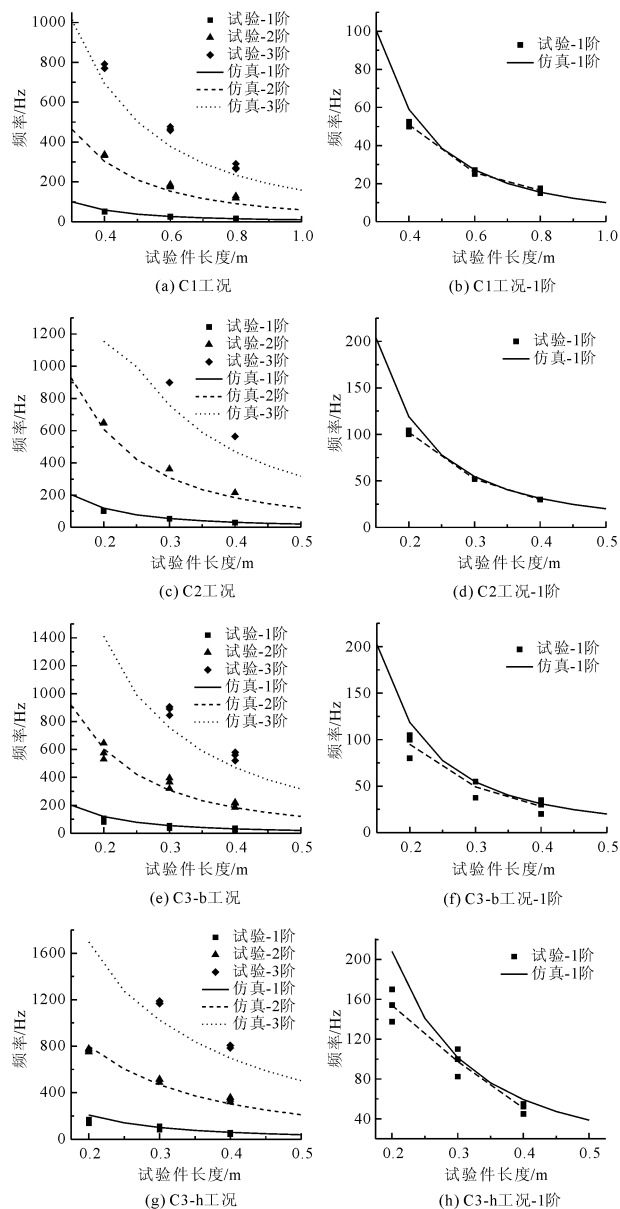


图6 试验频率和数值分析频率的对比

尽管数值分析中实体梁的振动和物理试验中试件振动状态都更接近于铁木辛柯梁模型,但试验结果与数值结果仍然存在一定的差异。通过对比悬臂梁的试验频率与数值模拟频率,发现通过试验得到的2阶、3阶共振频率略高于通过数值分析得到的

结果,与马良筠等<sup>[21]</sup>的试验结果反映的趋势一致。关于其成因,有学者在动态加载试验中发现仿真混凝土的动态弹性模量随着应变速率的增加而增大<sup>[2]</sup>;而另有学者发现黏弹性会导致悬臂梁固有频率的降低<sup>[22]</sup>,因此造成这种现象的原因尚未有统一的结论。

通过试验得到的1阶共振频率则普遍低于通过数值分析得到的结果,根据图6(b)和图6(d)发现,二者的差异随长高比或长细比的增大而减小,这与Dawson等<sup>[23]</sup>在预扭转的矩形截面悬臂梁试验中发现的趋势吻合。Dawson等<sup>[23]</sup>认为虽然铁木辛柯梁理论考虑了剪切变形和转动惯量的影响,但仍然存在未知的次级效应,因此会存在这样的差异。在试件长高比增大到7~8(长细比为24.2~27.7)时,可以忽略试验与数值分析的结果之间的差异。

对比C1工况、C2工况和C3-b工况的试验结果,发现截面尺寸的差异对结果的影响较小,而试件长高比或长细比对结果的影响较大:1阶~3阶固有频率对应的动态弹性模量均随着长高比的增加而增加。综合试验结果,可以得到2阶和3阶固有频率对应的动态弹性模量 $E_{d,2}$ 、 $E_{d,3}$ 分别比1阶固有频率对应的动态弹性模量 $E_{d,1}$ 高55.16%和56.06%。各工况下试件动弹模随长高比变化的关系如图7所示。

从图7中可以看到,当试件长高比为8时截面尺寸对测定结果的影响较为显著,这可能是因为在数据处理中,C1工况组(100 mm × 100 mm)长试件的功率谱谱线密度较小导致了最终测定结果的偏大;而C2工况组(50 mm × 50 mm)长试件因振捣难度大,密实后内部空腔累积造成最终测定结果偏小。综合考虑试验测得的动弹性模量,通过最小二乘拟合,得到1阶~3阶动弹性模量随长高比变化的线性拟合方程。对于1阶频率对应的动弹性模量,当忽略长高比为3的异常值时,Pearson相关系数 $R$ 最高,达到了0.95。1阶~3阶频率对应的动弹性模量随长高比变化的经验公式如下所示:

$$E_{d,1} = 94.5l/h + 479.6 \quad (5)$$

$$E_{d,2} = 113.7l/h + 952.4 \quad (6)$$

$$E_{d,3} = 24.9l/h + 1508.1 \quad (7)$$

式(5)~式(7)表现出了动弹性模量的测定值与试件长高比的相关关系。显然,长高比 $l/h$ 对2阶共振频率对应的动弹模测定结果影响最显著,对3阶共振频率对应的动弹模测定结果影响最小,而对于1阶频率对应的动弹性模量与长高比间的线性关

系最明显。

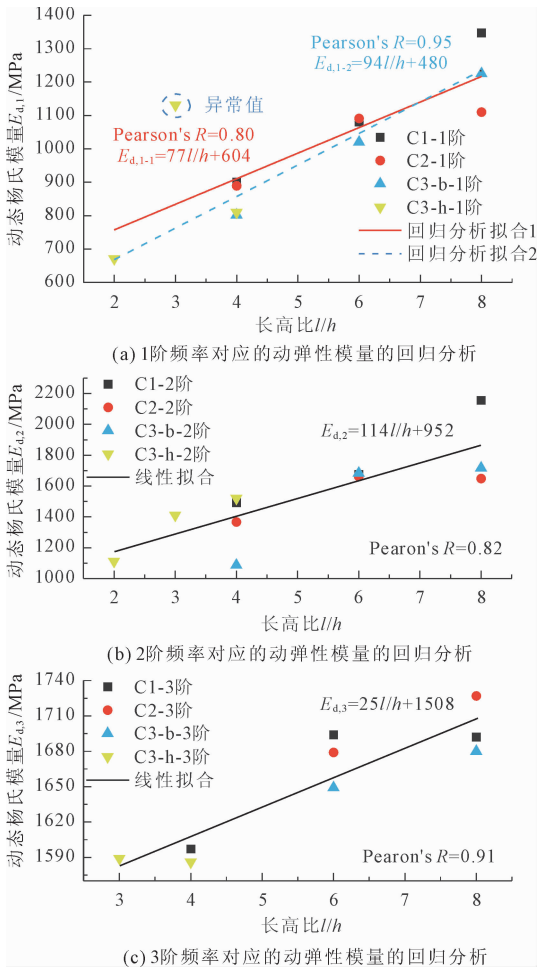


图7 试件长高比对动弹模测定结果的影响

### 3 结论

(1) 数值分析的结果表明,非完全固支效应随着试件长度的降低和模态阶数的增加而减小。

(2) 通过试验手段与通过数值分析得到的悬臂梁共振频率结果存在差异。通过试验得到的2阶、3阶共振频率略大于数值分析的结果;而1阶共振频率则相反,差异的大小随试件长高比的增大而减小,至长高比为7~8时趋于零。

(3) 基于悬臂梁法测定仿真混凝土的动态弹性模量,测量结果主要受试件长高比的影响,其他尺寸参数的影响不显著。

(4) 采用悬臂梁法测定仿真混凝土的动弹性模量,试验结果与标准值存在差异,即使考虑了传统梁模型的修正和非完全固支效应的修正后,差异依然存在。当通过1阶频率计算动弹模  $E_d$  时,与标准值的差异与试件的长高比有明显的相关性,随着试件长高比增大至7~8,差异趋于零;通过2阶、3阶频

率计算得到的动弹模则分别高于1阶55.16%和56.06%。

以上结论表明,在悬臂梁试验中当试件的长高比至少为7时可通过1阶共振频率较为准确地计算动弹性模量,为悬臂法测定仿真混凝土动弹模提供了依据。试件制备难度随着长高比的增大而加剧,因此通过短试件和动弹模随长高比变化的经验公式预测长试件的测定结果将会带来较大的便利,这就要求通过大量的试验去拟合更准确的经验公式。

### 参考文献:

- [1] 朱彤,林皋,马恒春. 混凝土仿真材料特性及其应用的试验研究[J]. 水力发电学报,2004,23(4):31-37.
- [2] 张宇,冯新,朱昆,等. 仿真混凝土材料动态拉伸试验研究[J]. 地震工程与工程振动,2015,35(6):18-25.
- [3] 普通混凝土长期性能和耐久性试验方法:GB/T 50082—2009. [S]. 北京:中国建筑工业出版社,2009.
- [4] 公路工程水泥及水泥混凝土试验规程:JTG 3420—2020[S]. 北京:人民交通出版社,2020.
- [5] 水工混凝土试验规程:DL/T 5150—2017. [S]. 北京:中国电力出版社,2017.
- [6] Standard Test Method for Fundamental Transverse, Longitudinal, and Torsional Resonant Frequencies of Concrete Specimens: ASTM C215—19[S]. USA, 2019.
- [7] 王正,顾玲玲,高子震,等. 动态测试木材的泊松比[J]. 林业科学,2015,51(5):102-107.
- [8] Roohnia M. An estimation of dynamic modulus of elasticity in cantilever flexural timber beams[J]. Drvna Industrija, 2014,65(1):3-10.
- [9] Wang Z, Li L, Gong M. Measurement of dynamic modulus of elasticity and damping ratio of wood-based composites using the cantilever beam vibration technique[J]. Construction and Building Materials, 2012,28(1):831-834.
- [10] Liang C F, Liu T J, Xiao J Z, et al. The damping property of recycled aggregate concrete[J]. Construction and Building Materials, 2016,102:834-842.
- [11] Haneefa M K, Girish S, Ranganath R V, et al. A Structural dynamic approach to evaluate modulus of elasticity of cantilever beam[J]. Applied Mechanics and Materials, 2016,852:483-488.
- [12] 杜玉涛. 拱坝库水压力效应的动力模型试验研究[D]. 大连:大连理工大学,2019:16-17.
- [13] 王忠阳. 地震作用下高混凝土重力坝模型库水压力效应的实验研究[D]. 大连:大连理工大学,2017.
- [14] 宋常. 混凝土重力坝的动力损伤分析[D]. 大连:大连理工大学,2011.

- [4] 张保良,赵锡宏,姜洪伟. 上部结构-筏-桩-地基共同作用分析[J]. 建筑结构学报,1997,18(2):72-78.
- [5] 尹骥,魏建华. 基于地基-基础-上部结构共同作用分析的长短PHC管桩基础处理[J]. 岩土工程学报,2011,33(S2):265-270.
- [6] 王磊,任彦华. 高层建筑结构桩筏基础-地基-上部结构共同作用分析[J]. 建筑结构,2018,48(S2):801-805.
- [7] 王国辉,李友东,刘双晨,等. 高耸重型储槽群桩筏基础变形监测和数值模拟研究[J]. 水利与建筑工程学报,2020,18(4):215-220,256.
- [8] 陈启冬,许立英,刘阳,等. 不同土性地基考虑SSI效应的隔震结构地震响应分析[J]. 水利与建筑工程学报,2021,19(2):149-154,214.
- [9] Desai C S. Constitutive modeling of materials and contacts using the disturbed state concept: part 1 - background and analysis [J]. Computers and Structures, 2015,146(1):214-233.
- [10] 崔涛. 变刚度群桩基础性能数值分析及沉降计算研究[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学,2016.
- [11] Schanz T, Vermeer P A, Bonnier P G. The hardening soil model: formulation and verification [C]//Beyond 2000 in Computational Geotechnical - 10 Years of PLAXIS,1999:281-297.
- [12] Benz T. Small-strain stiffness of soils and its numerical consequences [D]. Stuttgart: University of Stuttgart, 2007.
- [13] 尹骥. 小应变硬化土模型在上海地区深基坑工程中的应用[J]. 岩土工程学报,2010,32(S1):166-172.
- [14] 王卫东,王浩然,徐中华. 基坑开挖数值分析中土体硬化模型参数的试验研究[J]. 岩土力学,2012,33(8):2283-2290.
- [15] 王卫东,王浩然,徐中华. 上海地区基坑开挖数值分析中土体HS-Small模型参数的研究[J]. 岩土力学,2013,34(6):1766-1774.
- [16] 梁发云,贾亚杰,丁钰津,等. 上海地区软土HSS模型参数的试验研究[J]. 岩土工程学报,2017,39(2):269-278.
- [17] Brinkgreve R B J. Selection of Soil Models and Parameters for Geotechnical Engineering Application [M]. Soil Constitutive Models: Evaluation, Selection, and Calibration. Austin,2005:69-98.
- [18] Bolton M D. The strength and dilatancy of sands [J]. Geotechnique,1986,36(1):65-78.
- [19] Brinkgreve R B J, Kumarswamy S, Swolfs W M. Plaxis Material Models Manual [M]. Netherlands: Delft University of Technology & PLAXIS B V, 2006.
- [20] Janbu J. Soil compressibility as determined by oedometer and triaxial tests [C]//Proceedings of the 3rd European Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. Wiesbaden,1963:19-25.
- [21] 陈赟,罗敏敏,夏能武,等. 软土HSS模型参数现有试验成果统计分析[J]. 岩土工程学报,2021,43(S2):197-201.

(上接第40页)

- [15] 孔建伟. 地震和冲击荷载作用下CPR1000核电厂安全壳破坏机理试验研究[D]. 大连:大连理工大学,2017.
- [16] Rosinger H E, 叶同莘. 悬臂法测定动态弹性模量的评价[J]. 功能材料,1975(6):65-72.
- [17] Harris C M, Piersol A G. Harris' Shock and Vibration Handbook [M]. Fifth edition. New York: McGraw-Hill, 2010.
- [18] da Costa Azevedo A S, dos Santos Hoefel S. Analysis of rotatory inertia and shear deformation on transverse vibration of beams [C]//Congresso Nacional de Engenharia Mecanica (CONEM). 2016: 21-25.
- [19] Timoshenko S P. LXVI. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars [J]. Philosophical Magazine Series 6, 1921, 41(245):744-746.
- [20] Sutherland J G, Goodman L E. Vibrations of prismatic bars including rotatory inertia and shear corrections [R]. University of Illinois Engineering Experiment Station. College of Engineering. University of Illinois at Urbana-Champaign, 1951.
- [21] 马良筠,孙海峰. 梁式构件动态弹性模量的实验研究及振动分析中梁的有效长度问题[J]. 力学学报,1989(6):697-704.
- [22] 孙家驹,金开骅. 粘弹性梁的动力响应[J]. 应用数学和力学,1981(2):235-242.
- [23] Dawson B, Ghosh N G, Carnegie W. Effect of slenderness ratio on the natural frequencies of pre-twisted cantilever beams of uniform rectangular cross-section [J]. ARCHIVE Journal of Mechanical Engineering Science 1959—1982 (vols 1-23), 1971,13(1):51-59.