

基于近似 Woodbury 法的杆系结构静力稳定性分析

靳永强¹, 张 涛¹, 莫振林², 袁永强², 李彦滨¹, 周雄雄³

(1. 中国建筑第二工程局有限公司, 北京 100160;

2. 中国建筑西南勘察设计研究院有限公司, 四川 成都 610052;

3. 西北农林科技大学 水利与建筑工程学院, 陕西 杨凌 712100)

摘 要: 为了高效求解杆系结构的静力稳定性问题, 本文基于多点位移控制算法和近似 Woodbury 法, 提出了一种静力推覆分析方法。该方法以 Woodbury 公式为理论基础, 对多点位移控制的平衡方程进行展开, 并结合隔离非线性理论形成了具有刚度矩阵弹塑性分离形式的控制方程, 采用近似 Woodbury 法对控制方程进行高效求解, 避免在稳定性分析中整体刚度矩阵的实时求逆运算。通过数值模拟验证了本文方法的有效性和精确性, 结果表明: 该方法能够较好地追踪失稳后的非线性平衡路径, 获得下降段曲线, 处理负刚度问题。最后, 将本文方法应用于某框架结构的静力稳定性分析中, 论证了该方法能高效地获得荷载-位移全过程曲线, 完整反映结构的承载力、稳定性及刚度的整个变化历程。

关键词: 杆系结构; 静力稳定性; 近似 Woodbury 法; 隔离非线性理论

中图分类号: TU375.1

文献标识码: A

文章编号: 1672-1144(2022)01-0148-07

Static Stability Analysis for Skeletal Structures Based on Woodbury Approximation Method

JIN Yongqiang¹, ZHANG Tao¹, MO Zhenlin², YUAN Yongqiang², LI Yanbin¹, ZHOU Xiongxiang³

(1. China Construction Second Engineering Bureau Ltd., Beijing 100160, China;

2. China Southwest Geotechnical Investigation & Design Institute Co., Ltd., Chengdu, Sichuan 610052, China;

3. College of Water Resources and Architectural Engineering, Northwest A&F University, Yangling, Shaanxi 712100, China)

Abstract: An efficient stability analysis method for skeletal structures is proposed by combining the displacement control algorithm with multiple point constraints and the Woodbury approximation method. The inelasticity-separated governing equation including the multiple point displacement constraints is derived based on the Woodbury formula. It is solved by the Woodbury approximation method in the proposed scheme, resulting in an obvious advantage in efficiency for analyzing the stability of skeletal structures. During the analysis, the update and factorization of the global stiffness matrix can be avoided. The feasibility and validity of the proposed method is verified by numerical simulation example. It is indicated that the proposed method can capture the nonlinear equilibrium path and deal with the negative stiffness problem. Finally, the proposed scheme is applied to solve the nonlinear stability problem of a steel frame. Numerical results show that the proposed method can accurately acquire the critical load value in this case where the nonlinear equilibrium path has snap-through buckling situations. Thus, the proposed method has greater potential for obtaining the complete load-displacement curves and solving the negative stiffness problems of skeletal structures.

Keywords: skeletal structures; static stability analysis; Woodbury approximation method; inelasticity-separated theory

在土木工程领域中,由长度比横截面尺寸大很多的细长杆件所组成的结构称为杆系结构,如刚架、桁架、网壳等结构,其具有空间大、杆件布置灵活及结构形式优美等特点,被广泛应用于民用和工业等建筑中^[1-3]。在外荷载作用下,杆系结构中的部分杆件会承受较大的轴压力,其静力稳定性分析是不可忽略的关键环节。通常,在杆系结构的设计与分析中,强度问题(代表杆件截面所能承受的最大内力)和稳定性问题(表示结构或者构件不能以原来的平衡状态承受附加荷载)是紧密联系的^[4-5]。因此,为了得到杆系结构最为真实的临界荷载值及荷载与位移全过程曲线,在静力推覆分析时,需同时考虑材料非线性和几何非线性。

针对杆系结构的静力稳定性分析,已有研究取得了一系列成果,主要可分为两类^[6-8]:第一类是基于构件层面的宏观分析方法,具有建模简单、计算量小等特点。例如,韦良^[9]基于平衡微分方程并引入稳定函数推导了考虑几何非线性的梁柱单元刚度矩阵,同时利用塑性铰模型,提出了基于 QR 法的钢框架稳定性分析方法,能够准确、高效地获得结构极限承载力及变形能力;Li 等^[10]、靳永强等^[11]基于拟力法理论建立了轴压构件宏观分析模型,通过设置两个局部塑性机制来分别模拟弯曲变形和轴向塑性伸长行为,实现轴压构件的非线性屈曲分析。第二类是基于材料层面的非线性有限元分析方法,具有计算精度良好、计算量大等特点。例如,Nguyen 等^[12]采用更新拉格朗日列式建立了考虑几何非线性行为的平衡方程,并利用纤维塑性铰法来模拟空间框架结构的侧扭稳定性行为,可实现塑性变形沿杆件长度上的开展,通过数值算例验证了该方法的准确性和高效性;叶康生等^[13]、吴可伟^[14]基于共旋坐标法和塑性区法提出了一种杆系结构弹塑性大位移分析方法,将单元端部截面分割为若干小块面积,单元内的截面一直保持弹性状态,快速实现结构的静力稳定性分析。

在杆系结构的静力推覆分析中,其数值模拟的难点在于:失稳瞬间,结构刚度发生突变,承载力骤降,荷载-位移关系曲线呈现下降趋势。为了越过荷载-位移曲线的极值点,通常将采用位移控制算法来施加推覆力^[15]。为了克服结构中不同部位非线性程度的差异,满足荷载分布恒定比例关系,且提高数值求解的稳定性,黄羽立等^[16-17]提出了基于多点位移控制的推覆分析方法。该方法能够较好地获取荷载-位移曲线的下降段,准确追踪失稳后的非

线性平衡路径,具有良好的数值稳定性优势。

在构件层面,Wong 等^[18]基于位移分解原理提出了结构非线性高效分析方法-拟力法,该方法被广泛应用于工程结构的非线性分析和振动控制等领域^[19]。为了实现结构的精细化高效模拟,Li 等^[20]将位移分解思想拓展到材料应变层面,提出了隔离非线性有限元法,其基本原理是将材料应变分解为线弹性与非弹性两部分,并与有限元相结合,形成具有刚度矩阵弹塑性分离形式的控制方程,以 Woodbury 公式为求解工具,实现了局部材料非线性问题的高效求解^[21]。针对结构出现大范围材料非线性问题,Li 等^[22]通过引入组合近似法至 Woodbury 公式中,提出了近似 Woodbury 法来高效求解控制方程。随后,李钢等^[23]将隔离非线性有限元法嵌入到更新拉格朗日格式中,建立了考虑双重非线性(材料和几何非线性)行为的梁单元控制方程,并对近似 Woodbury 法进行了改进,高效求解整体控制方程,实现了杆系结构的动力双重非线性分析,但在求解其静力稳定性问题方面还有待进一步完善。

鉴于此,本文基于多点位移控制算法和近似 Woodbury 法,提出了杆系结构的静力稳定性高效分析方法。该方法利用 Woodbury 公式对多点位移控制的平衡方程进行展开,结合隔离非线性理论形成具有刚度矩阵弹塑性分离形式的控制方程,采用近似 Woodbury 法对其进行高效求解,在杆系结构的静力稳定性分析中,避免整体刚度矩阵的实时分解。以 Williams 双杆体系^[22]为数值算例,验证了本文方法在静力稳定性分析中的可行性和有效性。最后,通过某框架结构的静力稳定性分析,论证了该方法能高效地获得荷载-位移关系曲线的下降段,处理负刚度问题,反映结构的承载力、稳定性及刚度的整个变化历程。

1 多点位移控制算法概述

多点位移控制算法是一种较为新颖的静力推覆分析方法,通过引入位移刚性约束来保持恒定推覆侧力分布,以实现结构稳定性分析^[16-17]。该方法在解决结构复杂非线性问题时,特别是处理负刚度问题具有显著优势,能够获取结构从弹性阶段到软化阶段的全过程。对于杆系结构,其失稳瞬间平衡路径可能会发生“跳跃”等情况,为了精确及完整地追踪非线性屈曲路径,本文采用多点位移控制进行杆系结构的静力推覆分析。

以图 1 所示的 n 自由度模型比例加载为例,对

多点位移控制算法进行说明。在该模型上施加荷载 $(F_1:F_2:\cdots:F_n)$ 满足恒定比例关系为 $(p_1:p_2:\cdots:p_n = 1:2:\cdots:n)$, 应满足如下约束方程^[16-17]:

$$\mathbf{P}^T \mathbf{U} - \sum_{i=1}^n (p_i) u_0 = 0 \quad (1)$$

式中: $\mathbf{P} = \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}^T$, p_i 是第 i 个自由度上施加荷载的比例系数; $\mathbf{U} = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}^T$, u_i 是第 i 个自由度所对应的位移; u_0 是新增约束方程引入自由度所对应的位移。结构的平衡方程可写为:

$$\mathbf{F} - \mathbf{Q} = 0 \quad (2)$$

式中: $\mathbf{F} = \{F_1, F_2, \cdots, F_n\}^T$, 是关于位移 $\mathbf{U} = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}^T$ 的非线性函数, 表示结构的内力; $\mathbf{Q} = \{Q_1, Q_2, \cdots, Q_n\}^T$, 表示结构所受的外荷载。式(1)是方程组(2)的约束方程, 可基于拉格朗日乘子法构建新的方程组, 其形式如下^[16-17]:

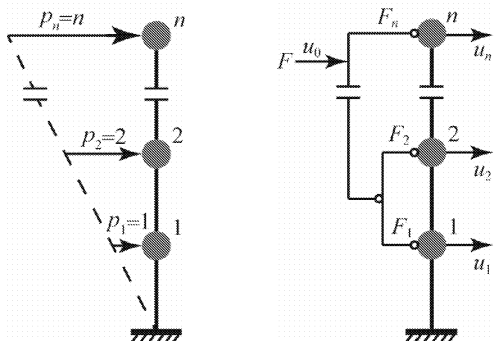
$$\begin{cases} \mathbf{F} + \mathbf{P}\lambda - \mathbf{Q} = 0 \\ \mathbf{P}^T \mathbf{U} - (\sum_{i=1}^n p_i) u_0 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

式中: λ 为拉格朗日乘子, 表示力加载系数。为了求解位移 $\mathbf{U}$ 和 λ , 可采用牛顿迭代法求解非线性方程组(3):

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{U}^{i+1} \\ \lambda^{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}^i \\ \lambda^i \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_t & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{F} + \mathbf{P}\lambda^i \\ C_0 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

其中: i 表示第 i 个迭代步; $\mathbf{K}_t$ 表示第 i 迭代步的结构切线刚度矩阵; C_0 的表达式为:

$$C_0 = \mathbf{P}^T \mathbf{U}^i - (\sum_{i=1}^n p_i) u_0 \quad (5)$$



(a) n 个自由度模型

(b) 多点位移控制静力加载

图 1 多点位移控制的静力推覆分析

2 基于近似 Woodbury 法的多点位移控制推覆分析

2.1 基于多点位移控制的隔离非线性方程

为了便于推导, 将式(4) 写为增量形式, 经整理

可得:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{U} \\ \Delta \lambda \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_t & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{R} \\ C_0 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

式中: $\Delta \mathbf{U}$ 和 $\Delta \lambda$ 分别表示第 i 迭代步至第 $i+1$ 迭代步的位移增量和加载系数增量; $\Delta \mathbf{R}$ 表示迭代过程中产生的不平衡力(等于外荷载向量和当前迭代步的结构内力向量之差, 即 $\Delta \mathbf{R} = \mathbf{Q} - \mathbf{F}$)。对上述增量方程直接求解时, 需要实时分解包含切线刚度 $\mathbf{K}_t$ 和荷载比例系数向量 $\mathbf{P}$ 组成的矩阵, 这将花费大量的时间成本。为此, 可基于 Woodbury 公式, 对方程(6) 中矩阵求逆部分进行展开:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_t & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_t^{-1} - \mathbf{K}_t^{-1} \mathbf{P} (\mathbf{P}^T \mathbf{K}_t^{-1} \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{K}_t^{-1} & \mathbf{K}_t^{-1} \mathbf{P} (\mathbf{P}^T \mathbf{K}_t^{-1} \mathbf{P})^{-1} \\ (\mathbf{P}^T \mathbf{K}_t^{-1} \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{K}_t^{-1} & -(\mathbf{P}^T \mathbf{K}_t^{-1} \mathbf{P})^{-1} \end{bmatrix} \quad (7)$$

将式(7) 代入式(6), 经整理可得:

$$\Delta \mathbf{U} = \Delta \mathbf{U}_R + \Delta \lambda \Delta \mathbf{U}_P \quad (8)$$

$$\Delta \lambda = (C_0 - \mathbf{P}^T \Delta \mathbf{U}_R) / (\mathbf{P}^T \Delta \mathbf{U}_P) \quad (9)$$

式中: $\Delta \mathbf{U}_R$ 和 $\Delta \mathbf{U}_P$ 分别表示不平衡力 $\Delta \mathbf{R}$ 和荷载比例系数向量 $\mathbf{P}$ 所产生的位移增量, 具体表达式分别如下:

$$\Delta \mathbf{U}_R = \mathbf{K}_t^{-1} \Delta \mathbf{R} \quad (10)$$

$$\Delta \mathbf{U}_P = \mathbf{K}_t^{-1} \mathbf{P} \quad (11)$$

对比式(6) 和式(8) 可知: 在求解增量位移 $\Delta \mathbf{U}$ 时, 式(6) 需要对包含切线刚度 $\mathbf{K}_t$ 和荷载比例系数向量 $\mathbf{P}$ 组成的矩阵进行分解, 而式(8) 仅需分解切线刚度矩阵 $\mathbf{K}_t$ 。根据文献[23], 可将式(10) 和式(11) 表达成具有隔离非线性特征的控制方程, 形式分别如下:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{eg} & \mathbf{K}'_r \\ \mathbf{K}_r^T & \mathbf{K}_p'' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{U}_R \\ -\Delta \mathbf{E}_p'' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{R} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{eg} & \mathbf{K}'_r \\ \mathbf{K}_r^T & \mathbf{K}_p'' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{U}_P \\ -\Delta \mathbf{E}_p'' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

其中: $\mathbf{K}_{eg}$ 表示结构整体刚度矩阵, 是由弹性刚度矩阵和几何刚度所组成 ($\mathbf{K}_{eg} = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g$), 体现结构的几何非线性行为; $\mathbf{K}'_r$ 为系数矩阵, 代表塑性截面变形与节点内力之间的关系; $\mathbf{K}_p''$ 为分块对角矩阵, 包含结构的材料非线性变形信息^[23]。

本文采用更新拉格朗日格式描述几何非线性行为, 因此, 上述两个方程中的所有矩阵和向量均是以 t 时刻的已知构型作为参考系。由式(12) 和式(13)

可知,多点位移控制的平衡方程(式(6))可基于 Woodbury 公式进行转换,将切线刚度矩阵 $\mathbf{K}_t$ 和荷载比例系数加载向量 $\mathbf{P}$ 拆分开来,分别形成由不平衡力 $\Delta \mathbf{R}$ 和荷载比例系数加载向量 $\mathbf{P}$ 作为外荷载的平衡方程(式(10)和式(11)),再结合隔离非线性基本理论,将式(10)和式(11)表达成具有隔离非线性特征的控制方程(式(12)和式(13))。

2.2 高效求解方法

根据文献[23]可知,具备隔离非线性特征的控制方程(式(12)和式(13))可采用近似 Woodbury 法进行高效求解,其核心思想是:采用 Woodbury 公式对控制方程进行精确展开,假定实时变化的整体刚度矩阵在某一时间段内保持不变,与舒尔补矩阵相关的线性方程采用组合近似法高效求解,在杆系结构的静力稳定性分析中,能避免矩阵的实时更新和分解运算,可显著提高计算效率。在某段时间区域 $t \in [T_j, T_{j+1}]$,基于近似 Woodbury 法求解式(12)和式(13)的具体表达式分别如下:

$$\underbrace{\Delta \mathbf{U}_R(t)}_{n \times 1} = \underbrace{\mathbf{K}_{eg}(T_j)}_{n \times n}^{-1} \underbrace{\Delta \mathbf{R}(t)}_{n \times 1} + \underbrace{\mathbf{K}_{eg}(T_j)}_{n \times p}^{-1} \underbrace{\mathbf{K}'_r(t)}_{p \times p} [\underbrace{\mathbf{K}_p''(t)}_{p \times p} - \underbrace{\mathbf{K}_f(T_j)}_{p \times p}]^{-1} \underbrace{\mathbf{K}'_r(t)}_{p \times n} \underbrace{\mathbf{K}_{eg}(T_j)}_{n \times n}^{-1} \Delta \mathbf{R}(t) \quad (14)$$

$$\underbrace{\Delta \mathbf{U}_p(t)}_{n \times 1} = \underbrace{\mathbf{K}_{eg}(T_j)}_{n \times n}^{-1} \underbrace{\mathbf{P}}_{n \times 1} + \underbrace{\mathbf{K}_{eg}(T_j)}_{n \times p}^{-1} \underbrace{\mathbf{K}'_r(t)}_{p \times p} [\underbrace{\mathbf{K}_p''(t)}_{p \times p} - \underbrace{\mathbf{K}_f(T_j)}_{p \times p}]^{-1} \underbrace{\mathbf{K}'_r(t)}_{p \times n} \underbrace{\mathbf{K}_{eg}(T_j)}_{n \times n}^{-1} \mathbf{P} \quad (15)$$

式中: $\mathbf{K}_f(T_j) = \mathbf{K}_r'^T(T_j) \mathbf{K}_{eg}(T_j)^{-1} \mathbf{K}'_r(T_j)$; 矩阵 $[\mathbf{K}_p''(t) - \mathbf{K}_f(T_j)]$ 被称为矩阵 $\mathbf{K}_{eg}(T_j)$ 的舒尔补; $\Delta \mathbf{R}(t)$ 表示 t 时刻的不平衡力。 n 表示结构自由度, p 表示结构的塑性自由度。

由式(14)和式(15)可知:整体刚度矩阵 $\mathbf{K}_{eg}(T_j)$ 的分解和矩阵 $\mathbf{K}_f(T_j)$ 的合成只需在 T_j 时刻执行一次即可,在时间区域 $t \in [T_j, T_{j+1}]$,主要计算量集中于舒尔补矩阵 $[\mathbf{K}_p''(t) - \mathbf{K}_f(T_j)]$ 的分解。在近似 Woodbury 法中,与舒尔补矩阵相关的线性方程组采用组合近似法求解,避免对其进行直接分解运算,因此本文方法的计算过程仅涉及矩阵和向量的“回代”运算,能极大地提高杆系结构稳定性分析的计算效率。以式(14)为例,其具体求解流程见表 1。

表 1 混合近似法的时间复杂度

计算次序	计算项目	运算方法
(1)	$\Delta \mathbf{U}_{R1}(t) = \mathbf{K}_{eg}(T_j)^{-1} \Delta \mathbf{R}(t)$	矩阵回代
(2)	$\Delta \mathbf{U}_{R2}(t) = \mathbf{K}'_r(t)^T \Delta \mathbf{U}_{R1}(t)$	矩阵与向量相乘
(3)	$\Delta \mathbf{U}_{R3}(t) = [\mathbf{K}_p''(t) - \mathbf{K}_f(T_j)]^{-1} \Delta \mathbf{U}_{R2}(t)$	组合近似法
(4)	$\Delta \mathbf{U}_{R4}(t) = \mathbf{K}'_r(t) \Delta \mathbf{U}_{R3}(t)$	矩阵与向量相乘
(5)	$\Delta \mathbf{U}_{R5}(t) = \mathbf{K}_{eg}(T_j)^{-1} \Delta \mathbf{U}_{R4}(t)$	矩阵回代
(6)	$\Delta \mathbf{U}_R(t) = \Delta \mathbf{U}_{R1}(t) + \Delta \mathbf{U}_{R5}(t)$	向量相加

其中:计算次序(3)中的项目可采用组合近似法进行求解,具体求解流程可参见文献[23]。

2.3 近似矩阵更新准则

为了能够消除矩阵近似所引起的误差,可建立近似矩阵更新准则对近似矩阵进行“适时”更新,即^[23]:

$$\varphi = \frac{|\Delta \mathbf{U}(t)^T \mathbf{K}_t(t) \Delta \mathbf{U}(t)|^{1/2} - |\Delta \mathbf{U}(t)^T [\Delta \mathbf{R}(t) + \Delta \lambda(t) \mathbf{P}]|^{1/2}}{|\Delta \mathbf{U}(t)^T [\Delta \mathbf{R}(t) + \Delta \lambda(t) \mathbf{P}]|^{1/2}} < \varepsilon_0 \quad (16)$$

其中: $|\cdot|$ 表示绝对值; φ 表示由矩阵近似所产生的相对误差; $\Delta \lambda(t)$ 表示 t 时刻的加载系数增量; ε_0 为用户自定义参数,用于控制矩阵更新频次^[23]。矩阵 $\mathbf{K}_t(t)$ 表示结构的切线刚度,对方程(12)进行消元,可得:

$$\mathbf{K}_t(t) = \mathbf{K}_{eg}(t) - \mathbf{K}'_r(t) \mathbf{K}_p''(t)^{-1} \mathbf{K}'_r(t)^T \quad (17)$$

针对某时间段($t \in [T_j, T_{j+1}]$),当式(16)成立时,则矩阵近似所引起的误差(见式(14)和式(15))可在迭代过程中进行消除。当 $t = T_{j+1}$ 时,式(16)不成立,表明:矩阵近似所引起的误差较大,需将式(14)和式(15)中的矩阵 $\mathbf{K}_{eg}(T_j)$ 和 $\mathbf{K}_f(T_j)$ 进行更新,即分别用矩阵 $\mathbf{K}_{eg}(T_{j+1})$ 和 $\mathbf{K}_f(T_{j+1})$ 进行替换。因此,通过建立近似矩阵更新准则,可“适时”地对近似矩阵进行更新,使本文方法在满足计算精度的前提下提高计算效率。

2.4 求解流程

针对杆系结构的静力稳定性分析,本文方法的求解流程如图 2 所示。

2.5 效率分析

时间复杂度是一种客观反映算法效率的工具,能够定量地评估算法本身在执行过程中所需要的理论时间,不依赖于计算机性能、编程技巧等外在因素^[24-25]。就式(10)和式(12)而言,当式(10)采用传统有限元法(矩阵分解采用 LDL^T 法)进行求解,式(12)采用近似的 Woodbury 法进行求解时,可依据文献[23]分别将上述两种方法的时间复杂度列

于表 2。

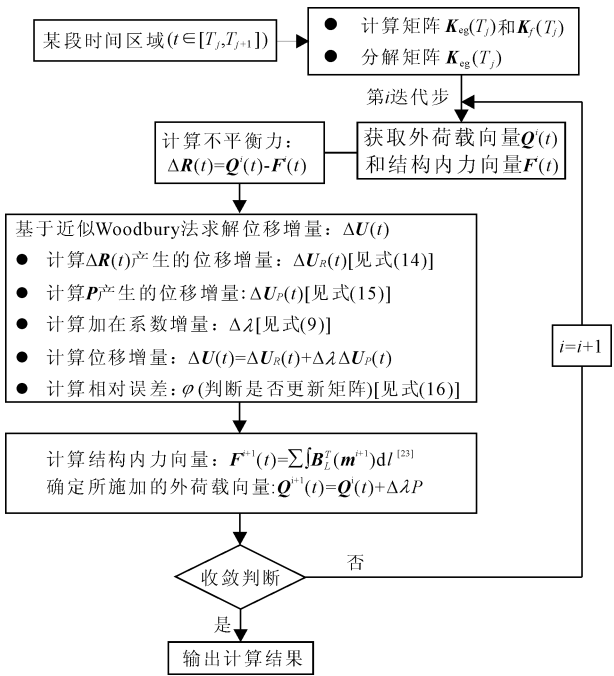


图 2 本文方法求解流程图

表 2 三种方法的时间复杂度函数 (t ∈ [T _j , T _{j+1}])	
方法	时间复杂度
近似 Woodbury 法	$T_W \approx (s^2 + 3s)p^{\frac{5}{3}}$
传统有限元法	$T_C = nm^2 + 8nm + n$

其中: m 为矩阵 $K_{eg}(T_j)$ 的带宽; l 为舒尔补矩阵的带宽, 近似取: $l \approx 2p^{2/3}$; α 和 β 分别为矩阵 K'_r 和 $K''_p(t)$ 中每列非零元素数的最大值(梁单元分别为 6 和 12); s 为 CA 法的基向量个数。

3 数值分析

3.1 模型验证

以经典的 Williams 双杆体系^[26]为数值算例(如图 3 所示), 验证本文方法在解决负刚度问题时的有效性。结构杆件均为 $\varphi 114\text{ mm} \times 4\text{ mm}$ 的钢管, 材料本构关系为理想弹塑性, 屈服应力为 240 MPa, 弹性模量为 210 GPa。每根杆件划分成 10 个单元(3 结点 Timoshenko 纤维梁单元); 杆件截面被分割成 24 个小面积(24 根纤维), 环向分成 12 等份, 径向分成 2 等份。

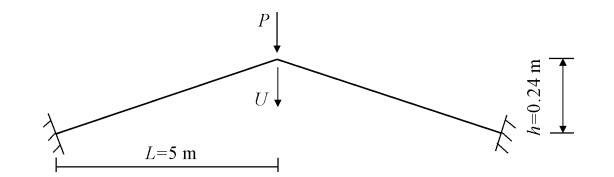


图 3 Williams 双杆体系

图 4 给出了本文方法与沈世钊等^[26]模拟的竖向荷载 - 位移曲线, 两者吻合较好。其中, 本文方法和沈世钊等^[26]所获得的临界荷载值分别为 15.55 kN 和 15.56 kN, 表明: 本文方法在进行稳定性分析时可精确获得结构的荷载 - 位移全过程曲线, 能追踪发生“跳跃”失稳的平衡路径。

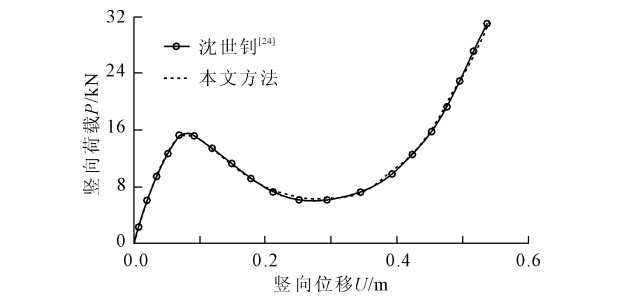


图 4 Williams 双杆体系的荷载 - 位移曲线

3.2 数值算例

以某 3 层三跨钢框架结构为算例, 进行静力稳定性分析, 其立面和平面图如图 5 所示。该结构层高均为 3.9 m, X 方向为 3 跨(边跨跨度为 6 m, 中跨跨度为 9 m), Z 方向为 4 跨(跨度均为 6 m), 梁柱截面尺寸如图 5 所示。

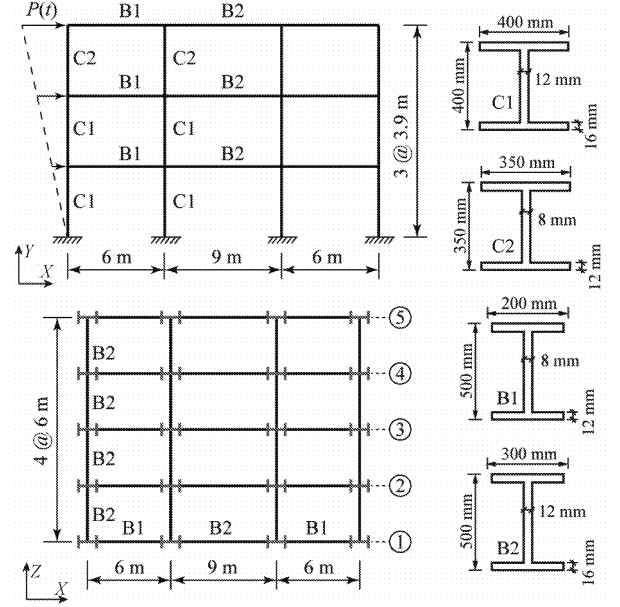


图 5 3 层三跨钢框架结构

各杆件均采用 3 结点 Timoshenko 纤维梁单元, 柱划分 6 个单元, 边跨梁划分 8 个单元, 中跨梁划分 12 个单元, 有限元模型总计 1 068 个单元, 总自由度为 5 850, 构件的截面纤维数均为 19 根。钢材本构关系采用双线性随动强化模型, 其中弹性模量 $E_e = 206\text{ GPa}$, 屈服强度 $\sigma_y = 345\text{ MPa}$, 屈服后刚度 $E_t =$

$0.02E_c$ 。恒荷载集中施加于梁柱节点,大小均为 750 kN。采用倒三角侧向荷载模式对结构进行水平推覆(见图 5);CA 法的最大基向量个数取 5。

图 6 给出了静力推覆荷载作用下结构第①榀的基底剪力和顶点位移全过程曲线,可见采用本文方法能够较好地追踪结构失稳后的下降段曲线,即软化过程,可以获得稳定的临界荷载值及对应的侧向位移,分别为 1 411 kN 和 0.441 m。图 6 也绘制了仅考虑材料非线性行为时第①榀的基底剪力和顶点位移曲线,对比结果表明:几何非线性行为导致结构失稳,在进行稳定性分析时,需同时考虑结构的材料和几何非线性(双重非线性)行为,以获得实际的极限承载力。图 7 给出了静力推覆分析过程中各层推覆力和顶点位移关系曲线,可以看出各层施加的推覆力严格符合等比例荷载模式,满足多点位移控制算法的荷载分布恒定比例关系。

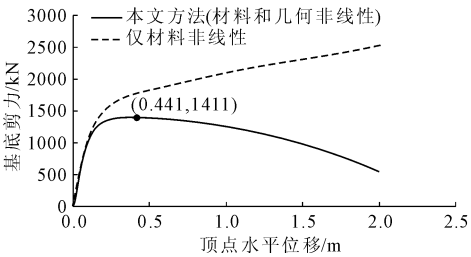


图 6 第①榀基底剪力 - 顶点位移曲线对比图

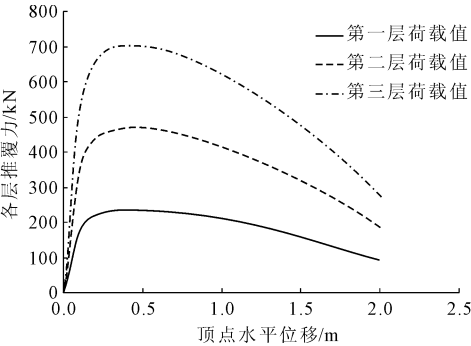


图 7 各层推覆力荷载值 - 顶点位移曲线图

在静力推覆分析过程中,结构的塑性自由度数(p)时程曲线如图 8 所示。其中,被激活的最大塑性自由度数为 1 725,占总自由度数的 29.5%,每个增量步的平均塑性自由度为 1 360.5(总增量步为 1 788),占总自由度数的 23.3%。

为了验证本文方法的高效性,图 9 给出了本文方法和传统有限元法(采用 LDL^T 分解法)的时间复杂度时程曲线,其中,荷载增量步的时间复杂度等于每个迭代步所需时间复杂度的总和。由图 9 可知,传统有限元法在每个增量步的时间复杂度仅随迭代

步数而发生变化,本文方法的时间复杂度与迭代步数、基向量个数、所激活的塑性自由度数及近似矩阵更新次数均相关,在执行自适应策略时,近似矩阵的更新会导致该增量步的时间复杂度变大。在整个静力推覆分析过程中,矩阵更新的次数为 58,与总增量步数(1 788)的比例为 1:31,表明:近似矩阵更新准则(见式(16))能较好地控制矩阵更新次数,在保证迭代收敛的前提下使计算效率最优。此外,迭代步数也会影响算法的计算成本,表 3 统计了本文方法和传统有限元法的总迭代步数,可知:本文方法所需的迭代步数要多于传统有限元法,即本文方法的收敛性要低于传统有限元法,原因在于:近似 Woodbury 法中近似矩阵所引起的误差需要更多迭代步进行消除。同时,表 3 统计了上述两种方法的总时间复杂度和每个荷载增量步的平均时间复杂度,本文方法和传统有限元法的总时间复杂度分别为 0.98×10^{11} 和 5.10×10^{11} ,平均到每个增量步的时间复杂度分别为 0.55×10^8 和 2.85×10^8 ,结果表明:在计算效率方面,本文方法比传统有限元法快 5.18 倍,验证了该方法能高效分析杆系结构的静力稳定性问题。

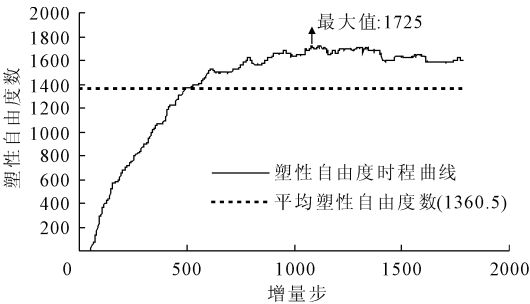


图 8 塑性自由度时程曲线

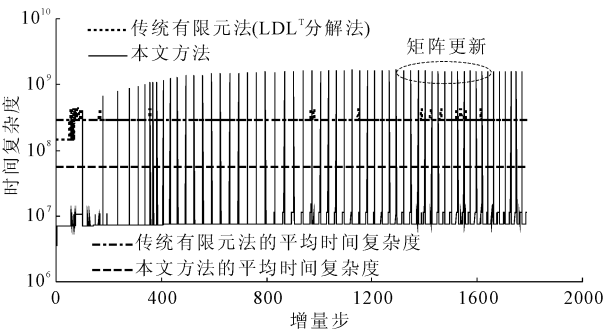


图 9 时间复杂度时程曲线

表 3 总迭代步数和时间复杂度对比

方法	总迭代步数	总时间复杂度	平均时间复杂度
传统有限元法	3541	5.10×10^{11}	2.85×10^8
本文方法	3868	0.98×10^{11}	0.55×10^8

4 结 论

针对杆系结构的静力稳定性问题,本文基于多点位移控制算法和近似 Woodbury 公式,提出了高效的静力推覆分析方法。利用 Woodbury 公式对多点位移控制的平衡方程进行展开,结合隔离非线性理论形成了具有刚度矩阵弹塑性分离形式的控制方程,并采用近似 Woodbury 法对控制方程进行高效求解。最后,将该方法应用于某框架结构的静力稳定性分析中,并得到如下结论:

(1) 本文方法是以 Woodbury 公式为理论基础,将多点位移控制的平衡方程变为具有隔离非线性特性的控制方程,实现刚度矩阵弹塑性分离,并采用近似 Woodbury 法高效求解控制方程。

(2) 本文方法能够高效分析杆系结构的静力稳定性问题,可追踪失稳后的非线性平衡路径,获得下降段曲线,处理负刚度问题,能够准确获得荷载-位移全过程曲线,完整反映结构的承载力、稳定性及刚度的整个变化历程。

参考文献:

- [1] 朱宝华. 杆系结构理论[M]. 上海: 同济大学出版社, 1993.
- [2] Yang Y B. Recent researches on buckling of framed structures and curved beams [J]. Journal of Constructional Steel Research, 1993, 26(2/3): 193-210.
- [3] 李国强, 刘玉姝. 钢结构框架体系整体非线性分析研究综述[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2003, 31(2): 138-144.
- [4] 童根树. 钢结构的平面内稳定[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2005.
- [5] 陈 滔, 黄宗明. 基于有限单元柔度法和刚度法的几何非线性空间梁柱单元比较研究[J]. 工程力学, 2005, 22(3): 31-38.
- [6] Yang Y B, Kuo S R. Consistent frame buckling analysis by finite element method [J]. Journal of Structural Engineering, 1991, 117(4): 1053-1069.
- [7] 陆天天. 杆系结构几何非线性下的临界点及分叉失稳研究[D]. 北京: 清华大学, 2009.
- [8] 董 庆. 高层钢框架结构整体稳定性研究[D]. 南京: 南京林业大学, 2012.
- [9] 韦 良. 高层钢框架结构体系稳定分析的样条函数方法[D]. 南宁: 广西大学, 2014.
- [10] Li G, Fahnestock L A, Li H N. Simulation of steel brace hysteretic response using the force analogy method [J]. Journal of Structural Engineering, 2012, 139(4): 526-536.
- [11] 靳永强, 李 钢, 李宏男. 基于拟力法的钢支撑非线性滞回行为模拟[J]. 工程力学, 2017, 34(10): 139-148.
- [12] Nguyen P C, Kim S E. A new improved fiber plastic hinge method accounting for lateral-torsional buckling of 3d steel frames [J]. Thin-Walled Structures, 2018, 127: 666-675.
- [13] 叶康生, 吴可伟. 空间杆系结构的弹塑性大位移分析[J]. 工程力学, 2013, 30(11): 1-8.
- [14] 吴可伟. 空间杆系结构的弹塑性大位移分析[D]. 北京: 清华大学, 2012.
- [15] Batoz J L, Dhatt G. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1979, 14(8): 1262-1267.
- [16] 黄羽立, 陆新征, 叶列平, 等. 基于多点位移控制的推覆分析算法[J]. 工程力学, 2011, 28(2): 18-23.
- [17] Huang Y. Simulating the inelastic seismic behavior of steel braced frames including the effects of lowcycle fatigue [D]. Berkeley, USA: University of California, Berkeley, 2009.
- [18] Wong K K, Yang R. Inelastic dynamic response of structures using force analogy method [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1999, 125(10): 1190-1199.
- [19] 姚传国, 柳春光, 夏春旭. 拟力法在结构地震响应中的应用综述[J]. 水利与建筑工程学报, 2014, 12(3): 72-75, 109.
- [20] Li G, Yu D H. Efficient inelasticity-separated finite-element method for material nonlinearity analysis [J]. Journal of Engineering Mechanics, 2018, 144(4): 04018008.
- [21] 余丁浩. 隔离非线性有限元法及在 RC 结构抗震分析中的应用[D]. 大连: 大连理工大学, 2019.
- [22] Li G, Jia S, Yu D H, et al. Woodbury approximation method for structural nonlinear analysis [J]. Journal of Engineering Mechanics, 2018, 144(7): 04018052.
- [23] 李 钢, 靳永强. 基于近似 Woodbury 公式的梁单元几何大变形分析[J]. 土木工程学报, 2021, 54(11): 47-56.
- [24] Bazaraa M S, Jarvis J J, Sherali H D. Linear Programming and Network Flows[M]. 4th Edition. New York: Wiley, 2011.
- [25] Golub G H, Van Loan C F. Matrix Computations[M]. 4th Edition. Beijing: Posts & Telecom Press, 2014.
- [26] 沈世钊, 陈 昕. 网壳结构稳定性[M]. 北京: 科学出版社, 1999.