

考虑堆石料颗粒形状的大三轴数值模型构造

郜家奇^{1,2}, 迟世春^{1,2}

(1. 大连理工大学 海岸与近海工程国家重点实验室, 辽宁 大连 116024;

2. 大连理工大学 建设工程学部水利工程学院 工程抗震研究所, 辽宁 大连 116024)

摘要: 离散元数值试验是研究堆石料力学特性的重要手段之一。堆石料颗粒形状不规则且粒径跨度大, 很难形成既考虑颗粒形状, 又满足实验室级配和孔隙率要求的离散元数值试样。在研究傅里叶描述符对颗粒延伸率、纵横比、扁平度等形状描述指标影响的基础上, 构造了一系列不规则形状的细观堆石颗粒。结合离散元方法, 采用 Clump-ball 混合的落雨式分层过压建模法构造了大三轴数值模型。结果表明, 构造方法更接近实验室制样过程, 数值模型满足室内试验级配和孔隙率要求, 为研究颗粒形状对堆石料力学特性影响作铺垫。

关键词: 颗粒形状; 傅里叶描述符; 大三轴数值模型; 落雨式分层过压建模法; 离散元数值模拟

中图分类号: TV42⁺2

文献标识码: A

文章编号: 1672-1144(2020)03-0069-08

Numerical Model Based on the Shape of Rockfill Material

GAO Jiaqi^{1,2}, CHI Shichun^{1,2}

(1. State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, China;

2. Institute of Earthquake Engineering, Faculty of Infrastructure Engineering, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, China)

Abstract: Discrete element numerical test is one of the important means to analyze the mechanical properties of rockfill. The shape of rockfill particles is irregular and particle size span is large, therefore it is difficult to form discrete element numerical samples, which not only consider the particle shape but also meet the requirements of grading and porosity. A series of rockfill particles with irregular shapes were simulated based on the study of the influence of Fourier descriptors on shape description indicators including shape elongation, aspect ratio and flatness. Combined with the discrete element method, a large triaxial numerical model was constructed by using the Clump-ball mixed rain-drop layered overpressure modeling method. The results show that the construction method is closer to the laboratory sample preparation process, the numerical model can meet the requirements of laboratory test gradation and porosity, and can be used as a foundation to further analyze the influence of particle shape on the mechanical properties of rockfill.

Keywords: particle shape; Fourier descriptors; large triaxial numerical model; rainfall layered overpressure modeling method; discrete element numerical simulation

堆石料作为高土石坝的主要建筑材料, 其力学特性引起了研究者的广泛关注, 其中大型三轴剪切试验是主要的研究手段。但是, 室内试验结果受多种因素影响, 可重复性差。随着计算机技术的发展, 离散元方法 (DEM) 被广泛用于研究不同因素对堆

石料力学特性的影响^[1-3]。但是如何生成具有真实颗粒形状和处于压实状态的堆石颗粒成为目前亟待解决的问题^[4-6]。

采用 DEM 进行堆石料数值模拟, 历经了由简单到复杂、二维到三维的过程。对于堆石料颗粒形状,

早期一般使用单一圆盘或圆球,后发展为使用多个圆盘、圆球或者多边形等来模拟。比如在椭圆形上随机取点构造不规则多边形来描述颗粒形状^[7-9]; Azéma 等^[10]选用规则的五边形研究颗粒形状的影响;任树林等^[11]以类正方形、类三角形和类长方形三种形状表征异形颗粒;邵磊等^[12]以正四面体为核进行晶胞繁衍构造不同形状的堆石颗粒;Cheng 等^[13]提出在最密六方排列的近球体颗粒的基础上通过移除一定数量的基本球来模拟真实的颗粒特征。这些模拟方法虽然在一定程度上可以描述颗粒的形状特征,但是与真实的堆石颗粒形状差距较大,也并未与扁平度、棱角度等形状描述指标相联系。针对这一问题,Mollon 等^[14]采用傅里叶系数与平均粒径之比定义了实数傅里叶描述符,采用傅里叶描述符的线性组合方程,用 3 个主傅里叶描述符表征颗粒形状。方浩等^[15]在 Mollon 等的基础上深入探究了实数傅里叶描述符与平面颗粒形状指标参数之间的相关性,并证明了这种方法的重构颗粒与实际颗粒形状间具有较高的相似度。

构造颗粒集合体,金磊等^[16]基于拟振动法和分层复制法提出了适用于土石混合体的大三轴试样建模方法,试样相对密实度 0.5;邵磊等^[12]应用落雨法和分层振捣法生成颗粒集合体,为提高计算效率,剔除了小粒径组,放大了颗粒粒径;史旦达等^[17]采用重力沉积法建模三轴试样,建模时步达 300 万步;为了快速生成指定体积的均质性良好的颗粒簇,Giantia 等^[18]提出了模块组装法;Jiang 等^[19]在总结前人定点成样法^[20]、等向压密法^[21]和粒径放大法^[22]的基础上提出了分层欠压法制备均匀性较好的试样,平均孔隙率 0.30,适用于颗粒数目较少的模型;全帆等^[23]采用大三轴数值模型模拟了新疆某工程粗粒料颗粒破碎,颗粒最小粒径为 5 mm。上述建模方法虽然在构建大三轴数值模型时具有一定的适用性,但是往往并不能满足实验室级配和孔隙率要求。

本文基于傅里叶描述符生成堆石单颗粒模型,结合堆石料形状参数,对单颗粒模型进行优化消减,最终建立了适用于堆石料大三轴模型数值计算的三维离散元颗粒模型。模型构建采用 Clump-ball 混合的落雨式分层过压法,重构了粒径跨度 2 mm~60 mm、孔隙率 0.22 的大三轴数值模型。探讨了如何使数值试样既满足实验室级配粒径跨度大的要求,又接近室内试验试样的较小孔隙率。

1 不规则形状颗粒模型

1.1 颗粒形状描述指标

颗粒形状描述指标按维度可分为三类:1D、2D、3D。1D 形状描述指标包括长度、宽度、表面积、体积、直径、周长。2D 指标一般包含纵横比、凹凸度、球度、圆度、整体规则性、棱角性等。3D 指标包含:真球度、扁平度、三维球度、有效球度等。研究者一般选择扁平度、伸长率、纵横比、圆度、球度和规则度来描述颗粒形状。图 1 为颗粒的尺寸、最大内切圆和最小外接圆示意图。常用的形状描述指标定义为:

$$\text{扁平度: } e = S/I \quad (1)$$

$$\text{伸长率: } \lambda = I/L \quad (2)$$

$$\text{纵横比: } \gamma = S/L \quad (3)$$

$$\text{圆度: } R = \frac{\bar{R}_c}{R_{in,max}} \quad (4)$$

$$\text{球度: } s = \sqrt{\frac{R_{in,max}}{R_{ci,min}}} \quad (5)$$

$$\text{规则度: } R_e = \log\left(\frac{p}{p - p_{conv}}\right) \quad (6)$$

式中: S 表示颗粒短轴; I 表示颗粒中轴; L 表示颗粒长轴; $\bar{R}_c$ 表示颗粒轮廓上拐角及曲率变化处内切圆半径; $\bar{R}_c$ 表示内切圆半径的平均值; $R_{in,max}$ 表示颗粒最大内切圆半径; $R_{ci,min}$ 表示颗粒最小外接圆半径; p 表示颗粒投影轮廓的周长; p_{conv} 表示颗粒投影轮廓的全周长(含凸形部分)。

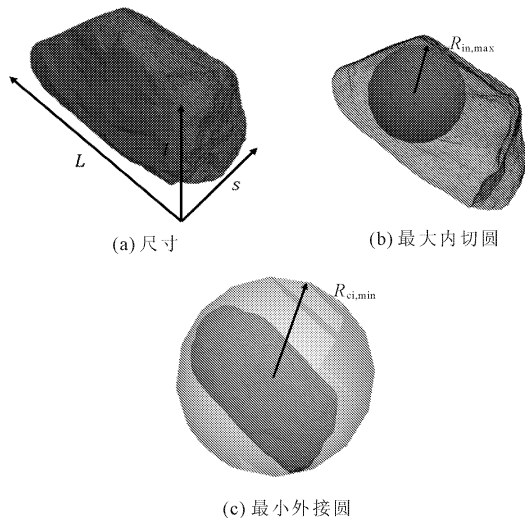


图 1 颗粒形状示意图

1.2 傅里叶函数法基本原理

构造不规则形状堆石颗粒的办法主要包括:傅

里叶函数法^[14]、球谐函数法^[24]以及POD正交分解法^[25]。其中,以傅里叶函数法应用范围最广,不仅可以模拟棱角度较低、光滑的卵石,而且可以模拟棱角度较高、粗糙的砾石。

如图2所示,以二维为例,以形心 O 为圆心,将颗粒轮廓等角度 θ 划分为 N 份,取为 $2^7 = 128$, $\theta = 2\pi/N$ 。傅里叶函数法基本公式:

$$r_i = r_0 + \sum_{n=1}^N [A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)] \quad (7)$$

$$r_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i \quad (8)$$

$$A_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i \cos(i \cdot \theta_i) \quad (9)$$

$$B_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i \sin(i \cdot \theta_i) \quad (10)$$

式中: r_0 表示颗粒平均半径; A_n 、 B_n 表示傅里叶系数; n 称为谐波序号; r_i 表示形心点 O 到轮廓点的距离; θ_i 表示形心等分角。

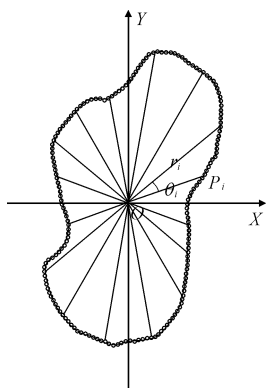


图2 傅里叶函数法基本原理

傅里叶描述符 D_n :

$$D_n = \frac{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}}{r_0} \quad 0 \leq n \leq 2 \quad (11)$$

$$D_n = 2^{\alpha \cdot \log_2(n/3) + \log_2(D_3)} \quad 3 < n \leq 8 \quad (12)$$

$$D_n = 2^{\beta \cdot \log_2(n/8) + \log_2(D_8)} \quad 8 < n \leq 64 \quad (13)$$

式中: D_1 表示颗粒轮廓对中心点的偏移程度; D_2 表示颗粒伸长程度; $D_3 \sim D_7$ 表示颗粒轮廓的不规则特性; $D_8 \sim D_{64}$ 描述颗粒表面粗糙程度等细节特征。 α 和 β 分别取值 -1.5 和 -2 。仅需考虑 D_2 、 D_3 和 D_8 的值,即可确定所有傅里叶描述符的值。

图3为 D_2 取值 0.0 、 0.1 、 0.2 , D_3 取值 0.00 、 0.05 、 0.10 以及 D_8 取值 0.000 、 0.015 与 0.030 ,在不同组合下的颗粒形状。如图3(a)所示, $D_2 = D_3 =$

$D_8 = 0$,模型为光滑球形。保持 D_3 、 D_8 值不变,随着 D_2 值的增大,颗粒形状趋于扁平;保持 D_2 、 D_8 值不变, D_3 取值增大,此时颗粒不再光圆,形状更有棱角;保持 D_2 、 D_3 值不变, D_8 取值增大,颗粒表面的粗糙度明显增大。

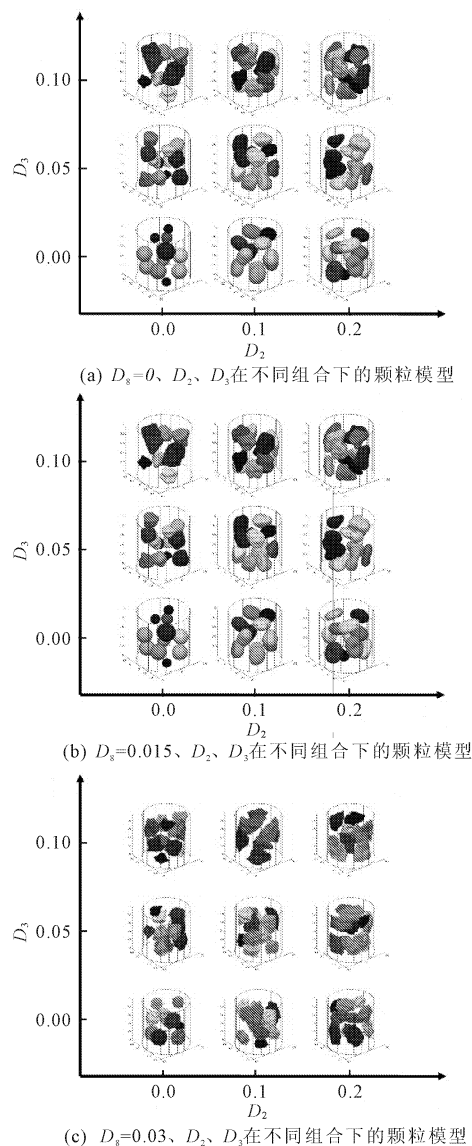
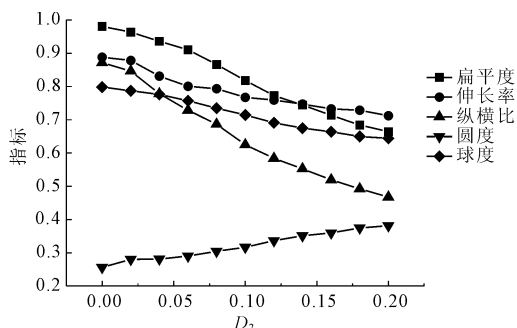
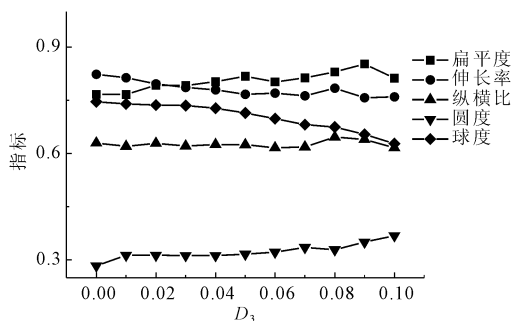


图3 傅里叶描述符对颗粒形状的影响

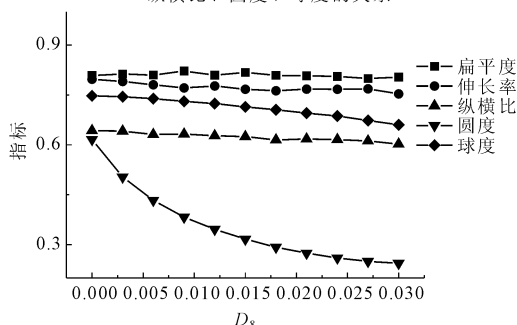
分别统计 D_2 、 D_3 、 D_8 参数值变化与扁平度、伸长率、纵横比、圆度、球度之间的关系。如图4(a)所示,随着 D_2 值的增大,颗粒扁平度、纵横比和球度值都减小,表明颗粒形状越来越扁平;圆度值增大。由图4(b)可得 D_3 与圆度正相关,与球度负相关。由图4(c)可得 D_8 对颗粒形状影响较小,对圆度影响较大,成明显的负相关关系。综上, D_2 对颗粒形状影响最大。



(a) $D_3=0.05, D_8=0.015, D_2$ 取值与扁平度、伸长率、纵横比、圆度、球度的关系



(b) $D_2=0.1, D_8=0.015, D_3$ 取值与扁平度、伸长率、纵横比、圆度、球度的关系



(c) $D_2=0.1, D_3=0.05, D_8$ 取值与扁平度、伸长率、纵横比、圆度、球度的关系

图4 不同傅里叶描述符取值与扁平度、伸长率、纵横比、圆度、球度关系

1.3 构造颗粒形状模板库

通过改变 D_2 、 D_3 、 D_8 的取值,可构造出一系列不规则形状颗粒。取 $D_2 = 0.1$, $D_3 = 0.05$, $D_8 = 0.015$ 时,颗粒扁平度为 0.818、伸长率为 0.767、纵横比 0.625、圆度 0.316、球度 0.714,处于堆石料实际颗粒形状描述指标的取值范围^[26]。傅里叶函数法构造颗粒形状,由批量离散点构成。对于任意一个内部节点,计算其到表面的距离,取最小值。遍历所有内部点,以内部点为球心,以对应的最小距离值为半径生成 Pebble 单元,所有 Pebble 单元组合成一个 Clump 颗粒。如图 5 为通过多个 Pebble 单元组合叠加而成的不规则形状颗粒,提取颗粒基本信息,将数值模型导入 PFC^{3D}。

颗粒数量直接影响计算效率。如图 6(a) 所示,一个 Clump 颗粒由 550 个 Pebble 单元构成,预估大三轴模型单元数量高达 200 万个,计算效率无法保证。按照保留半径较大值的办法,把组成一个颗粒的单元数分别消减到 200 个、50 个、10 个时,如图 6 所示。消减后的模型能基本刻画堆石颗粒的不规则形状,将由 10 个单元构造的颗粒模型定义为三维单颗粒模型。在构造大三轴数值模型时,堆石颗粒粒径不同,因此在将一系列不同形状的颗粒存储为形状模板之前,考虑到傅里叶函数法的尺度不变性^[27],可以对已构造好的颗粒进行各向等比例粒径归一化处理,以方便后续建模调用时控制粒径。

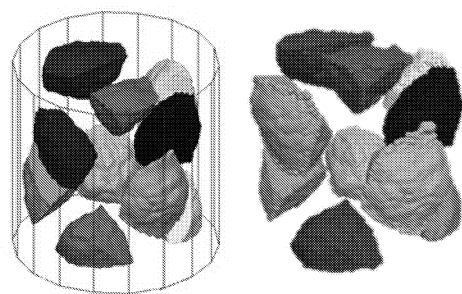


图5 不规则形状的单颗粒模型

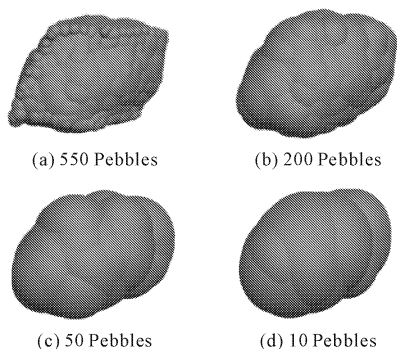


图6 消减后的单颗粒模型

2 大三轴数值模型构造

关于颗粒集合体的建模,学者们提出了纯几何法^[14]、膨胀法^[28-30]、分层欠压法^[19]、自重沉积法^[31-32]、模块组合法^[18]等。纯几何法、膨胀法适用于圆盘或球体颗粒;自重沉积法则适用范围较广,建模过程能保证颗粒位置的随机性。自重沉积法构造模型达不到指定密实度,且颗粒粒径分布不均匀(上疏下密)。对自重沉积法进行优化,本文采用了落雨式分层过压法构造大三轴模型。具体建模流程如图 7 所示。

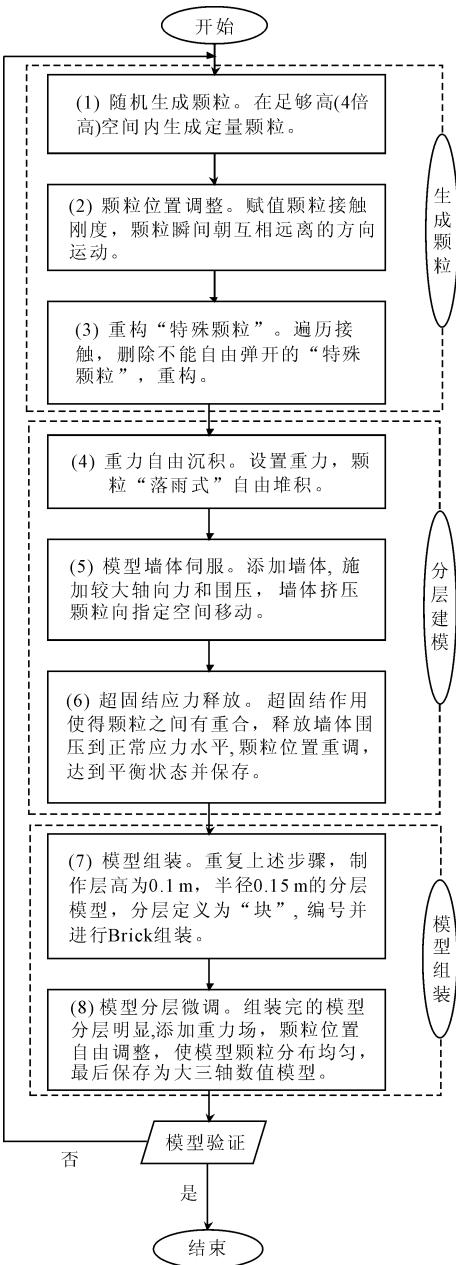


图 7 大三轴建模流程图

2.1 生成颗粒

Cho 等^[5]认为颗粒形状越不规则,临界摩擦角越大,越难达到较小孔隙率;并且由实验室统计得,颗粒粒径越小,颗粒形状越近似球形。因此,本文采用 Clump – ball 混合法来表征颗粒,粒径大于 10 mm 的颗粒用不规则形状的 Clump 表示,粒径小于 10 mm 的颗粒采用 Ball 表示。

大三轴模型半径 0.15 m,高 0.60 m。若直接同时生成全部颗粒,颗粒体积偏差较大,制样速度慢。本文采用分层法,将模型分为 6 层,每层高 0.1 m。如图 8 所示,在 4 倍高 (0.4 m) 压力室内随机生成

指定体积的堆石颗粒,颗粒位置随机分布。连接键赋值之后,颗粒互相弹开。但是有时颗粒夹在两颗粒之间,无法弹开;或者如图 9 所示两颗粒相互嵌套,形成“特殊颗粒”。遍历接触信息,定位特殊颗粒,删除后按照同粒组、等体积原则重构颗粒,投放至压力室内,见图 10。

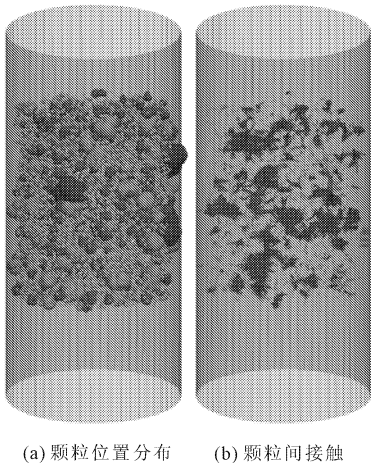


图 8 生成指定体积颗粒

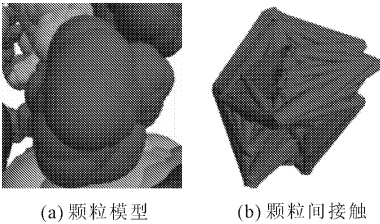


图 9 “特殊颗粒”示意

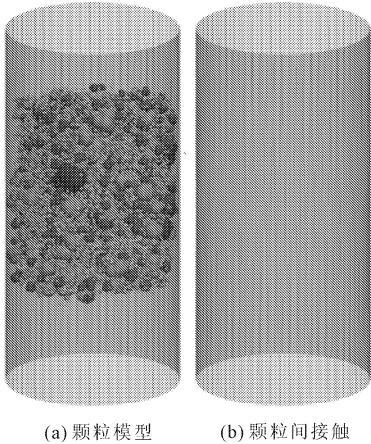


图 10 压力室内颗粒无重叠

2.2 分层建模

指定体积的颗粒生成之后,添加重力场,颗粒在重力作用下向下移动。为了增加颗粒移动速度,减少颗粒触底反弹位移,设置重力场加速度为 100

m/s^2 。大粒径颗粒接触之后形成骨架,小粒径颗粒填充骨架之间的空隙,一定程度上小颗粒向下运动的空间较大,此时颗粒分布“下密上疏”。如图 11 所示,受颗粒形状和不同颗粒排布方式的影响,颗粒自由落体之后,上表面不平整,模型达不到指定孔隙率。实验室制样使用锤子击实调整颗粒密实度,本文在模型内添加刚性平板墙体(墙体设置大刚度),自 0.13 m 处由上到下压实。墙体向下移动时,恢复重力场加速度为 10 m/s^2 。

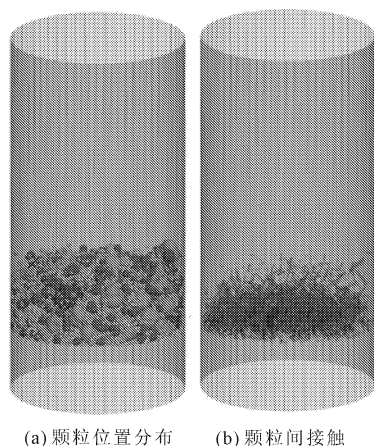


图 11 颗粒自由堆积

由实验室伺服围压 300 kPa 压缩颗粒时,模型往往无法达到指定分层高度 0.1 m。本文采用过(超)固结颗粒回弹法,围压扩大 1 000 倍,颗粒之间产生较大重叠,将颗粒挤压在 0.095 m 的高度范围内,释放围压至 300 kPa,颗粒回弹至平衡状态。图 12(a)表示在正常围压作用下的颗粒位置,此时, Ball 向下运动的通道被封闭;增大围压, Clump1 和 Clump2 继续向下运动,接触重叠量增大,图 12(b) Ball 向下运动通道被打开, Ball 在挤压和重力作用下继续向下运动;恢复围压 300 kPa, Clump1 和 Clump2 在反作用力作用下“回弹”,如图 12(c)所示。结合自然界土的超固结现象,应用到大三轴建模,一方面颗粒为纯刚体,恢复围压至正常应力水平进行数值实验,颗粒不会因为超固结应力历史影响其力学性质和变形特性,另一方面满足大三轴模型孔隙率的要求。此时,压力室体积 $7.069 \times 10^{-3} \text{ m}^3$, Clump 颗粒体积 $4.632 \times 10^{-3} \text{ m}^3$,占比 81.9%; Ball 颗粒体积 $1.023 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ 。颗粒总体积 $5.655 \times 10^{-3} \text{ m}^3$,实际孔隙率 0.22。

2.3 模型组装

重复前述步骤,构造 6 层分层模型。计算机并

行建模,提高效率。模型组装有两种方法,一是分层复制法,另一种是 Brick 组装法。分层复制法,遍历颗粒获取颗粒位置坐标 x, y, z 及半径信息 r ,将第二层模型颗粒高度(z)坐标增加 1 倍层高(0.1 m),将第三层模型颗粒高度(z)坐标增加 2 倍层高(0.2 m),直至第六层。这种方法需要重新赋值颗粒的密度、法向刚度、切向刚度、摩擦系数等参数。Brick 组装法,将建成的每一层模型定义为“块”,编号为 Brick1、Brick2、…、Brick6。“块”不仅保留了模型颗粒的物理性质和接触参数,而且避免了重新生成颗粒的繁琐。在定义“块”时,指定模型的基点。通过基点重新赋值新的坐标完成组装。模型组装后,各层模型之间分层明显,需让模型内所有颗粒在重力场内循环至平衡状态。如图 13(a)、图 13(b)、图 13(c)表示模型分层组装流程,图 13(d)、图 13(e)、图 13(f)表示建模完成后的小粒径组、大粒径组及全级配的大三轴数值模型。

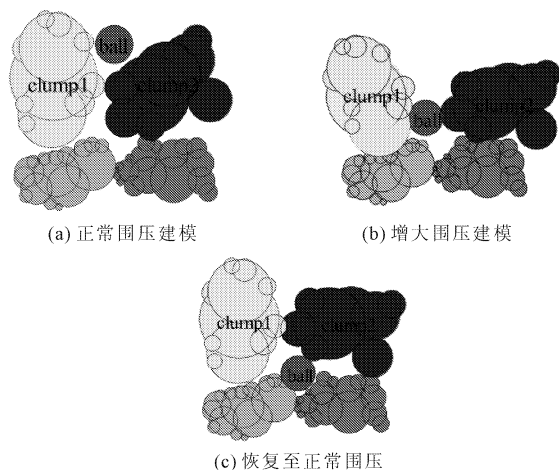


图 12 超固结回弹法示意图

2.4 模型验证

大三轴试验是研究堆石料力学特性的主要方法之一,实验室制样通常经过筛料、砸样、伺服等过程。通过筛料将堆石料按照粒径大小分组,并按照室内大三轴试验指定级配^[33]进行称重,备料。在数值试样建模时,在生成堆石颗粒时即进行粒径分组,建模完成后利用 Clump.vol 函数编程求出各粒径组体积,绘制数值模型的级配曲线并与指定室内试验级配做对比。如图 14 所示,数值模型级配曲线与室内试验级配曲线基本重合。数值模型的孔隙率为 0.22,接近室内试验的孔隙率 0.20。说明本文提出的方法可以生成满足颗粒形状和孔隙率要求的堆石料数值试样。

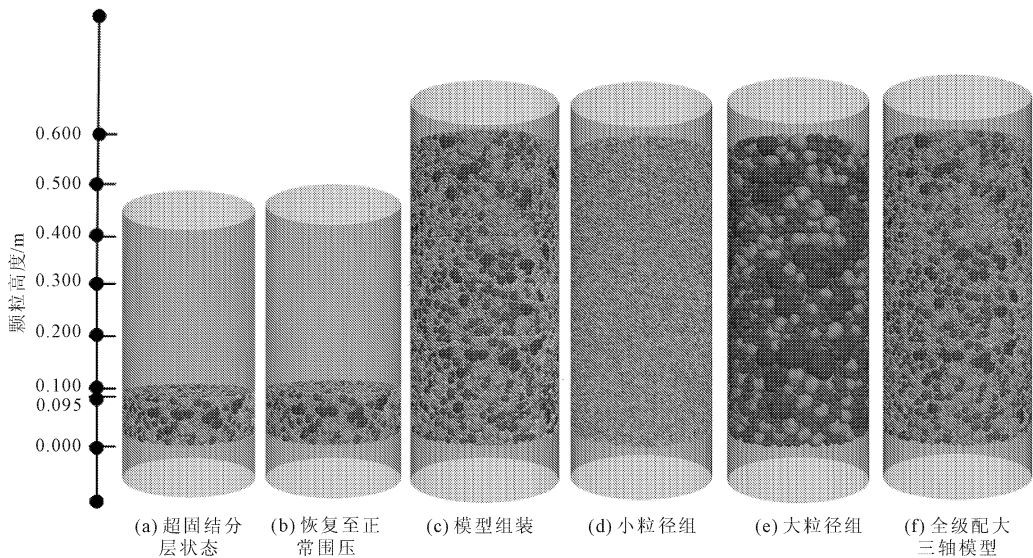


图 13 模型组装流程

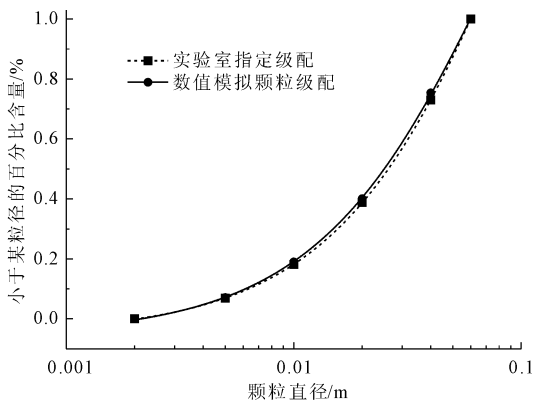


图 14 颗粒级配曲线

3 结 论

本文采用不规则形状堆石料生成方法和 Clump-ball 混合的落雨式分层过压建模法,构建了颗粒形状、颗粒级配、试样孔隙率和建模过程都更接近实验室大三轴试样的数值模型。本文主要结论如下:

(1) 傅里叶函数法构造三维离散元颗粒模型。采用傅里叶描述符快速构造不规则形状颗粒,分析傅里叶描述符 D_2 、 D_3 、 D_8 对扁平度、伸长率、纵横比、圆度、球度等形状描述指标的影响。 D_2 对颗粒形状影响最大,且与圆度成正相关关系,与颗粒扁平度、纵横比和球度负相关; D_3 主要影响颗粒棱角度,取值越大,颗粒形状棱角越多; D_8 对颗粒形状影响较小,主要与表面粗糙度成正相关关系。

(2) 采用 Clump-ball 混合的落雨式分层过压法来构造大三轴数值模型。Clump-ball 混合法解决了全级配粒径跨度大、颗粒数目多的问题;落雨式

重力沉积法保证了颗粒位置分布的随机性及模型结构的各向异性;在分层法提高模型构造效率的基础上,过压回弹法使模型颗粒更密实均匀。

(3) 数值模型完全按照堆石料实验室级配,目标孔隙率 0.20,实际孔隙率 0.22。

(4) 数值模型制样过程更接近实验室真实制样过程,接下来可以进行大三轴数值剪切试验,为进一步探讨颗粒形状对堆石料力学特性等的影响作铺垫。

参考文献:

- [1] 刘 君,刘福海,孔宪京. 考虑破碎的堆石料颗粒流数值模拟[J]. 岩土力学,2008,29(S1):107-112.
- [2] 邵 磊,迟世春,贾宇峰. 堆石料大三轴试验的细观模拟[J]. 岩土力学,2009,30(S1):239-243.
- [3] 杨 贵,许建宝,刘昆林. 粗粒料颗粒破碎数值模拟研究[J]. 岩土力学,2015,36(11):3301-3306.
- [4] Lim W L, McDowell G R. Discrete element modelling of railway ballast[J]. Granular Matter,2005,7(1):19-29.
- [5] Cho G C, Dodds J, Santamarina J C. Particle shape effects on packing density, stiffness, and strength: natural and crushed sands[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering,2006,132(5):591-602.
- [6] Potyondy D O, Cundall P A. A bonded-particle model for rock[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2004,41(8):1329-1364.
- [7] 周海娟,马 刚,袁 葳,等. 堆石颗粒压缩破碎强度的尺寸效应[J]. 岩土力学,2017,38(8):2425-2433.
- [8] 严成增,郑 宏,孙冠华,等. 粗粒料多边形表征及二维 FEM/DEM 分析[J]. 岩土力学,2015,36(S2):95-103.

- [9] 李 杨,余成学.堆石料单粒强度尺寸效应的颗粒流模拟方法研究[J].岩土力学,2018,39(8):2951-2959,2976.
- [10] Azéma Milien, Radjai Farhang, Peyroux Robert. Force transmission in a packing of pentagonal particles[J]. Physical Review, Statistical, Nonlinear and Soft Matter Physic, 2007,76(1):011301.
- [11] 任树林,曾亚武,赵 凯,等.颗粒形状对断层摩擦强度影响的数值试验研究[J].水利与建筑工程学报,2019,17(3):42-47,71.
- [12] 邵 磊,迟世春,张 勇,等.基于颗粒流的堆石料三轴剪切试验研究[J].岩土力学,2013,34(3):711-720.
- [13] Cheng Y P, Nakatay, Bolton M D. Discrete element simulation of crushable soil[J]. Geotechnique, 2003,53(7):633-641.
- [14] Mollon G, Zhao J D. Fourier – Voronoi – based generation of realistic samples for discrete modeling of granular materials[J]. Granular Matter,2012,14(5):621-638.
- [15] 方 浩,张 巍,肖 瑞,等.砂土颗粒形状的傅里叶描述符自动生成[J].高校地质学报,2018,24(4):604-612.
- [16] 金 磊,曾亚武,叶 阳,等.不规则颗粒及其集合体三维离散元建模方法的改进[J].岩土工程学报,2017,39(7):1273-1281.
- [17] 史旦达,周 健,刘文白,等.循环荷载作用下砂土液化特性的非圆颗粒数值模拟[J].水利学报,2008,39(9):1074-1082.
- [18] Ciantia M O, Boschi K, Shire T, et al. Numerical techniques for fast generation of large discrete-element models[C]//Proceedings of the Institution of Civil Engineers,2018,171(EM4):148-161.
- [19] Jiang M J, Konrad J M, Leroueil S. An efficient technique for generating homogeneous specimens for DEM studies[J]. Computers and Geotechnics,2003,30(7):579-597.
- [20] Katsuki S, Ishikawa N, Ohira Y, et al. Shear strength of rod material[J]. Journal of Civil Engineering,1989,410(8):1-12.
- [21] Cundall P A, Strack O D L. A discrete numerical model for granular assemblies[J]. Géotechnique, 1979,29(1):47-65.
- [22] Rothenburg L, Bathurst R J. Micromechanical features of granular assemblies with planar elliptical particles[J]. Géotechnique,1992,42(1):79-95.
- [23] 全 帆,唐新军.新疆某工程粗粒料颗粒破碎大型三轴试验数值模拟[J].水利与建筑工程学报,2018,16(4):105-109.
- [24] 石 崇,沈俊良.岩土颗粒三维形状表征参数对比分析[J].沈阳工业大学学报,2017,39(4):469-474.
- [25] Noura Ouhbi, Charles Voivret. 3D particle shape modeling and optimization through proper orthogonal decomposition[J]. Granular Matter,2017,19(4):86.
- [26] 邹德高,田继荣,刘京茂,等.堆石料三维形状量化及其对颗粒破碎的影响[J].岩土力学,2018,39(10):3525-3530.
- [27] 邢小军,曾接贤.改进的数字图像轮廓曲线傅里叶描述算法[J].计算机仿真,2011,28(11):222-226.
- [28] Cho N, Martin C D, Sego D C. A clumped particle model for rock[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences,2007,44(7):997-1010.
- [29] Salot C, Gotteland P, Villard P. Influence of relative density on granular materials behavior: DEM simulations of triaxial tests[J]. Granular Matter,2009,11(4):221-236.
- [30] 孔 亮,彭 仁.颗粒形状对类砂土力学性质影响的颗粒流模拟[J].岩石力学与工程学报,2011,30(10):2112-2119.
- [31] 史旦达,周 健,刘文白,等.砂土单调剪切特性的非圆颗粒模拟[J].岩土工程学报,2008,30(9):1361-1366.
- [32] Hartl J, Jin Y O. Numerical investigation of particle shape and particle friction on limiting bulk friction in direct shear tests and comparison with experiments[J]. Powder Technology,2011,212(1):231-239.
- [33] 姚世恩.复杂应力路径下粗粒土在湿化作用下的颗粒破碎研究[D].大连:大连理工大学,2018.