

DOI:10.3969/j.issn.1672-1144.2019.03.015

欧拉 - 伯努利梁单元刚度矩阵推导

张军锋, 尹会娜, 李杰, 陈淮
(郑州大学 土木工程学院, 河南 郑州 450001)

摘要: 为明确欧拉 - 伯努利梁单元刚度矩阵推导过程, 用统一的坐标系统和参数正方向规定, 包括荷载、位移、内力和应力等, 对等截面梁详细介绍了不同受力模式包括伸缩、扭转和弯曲问题的拉格朗日形函数和厄米特形函数, 系统给出了刚度矩阵推导所需的基本方程包括几何方程、本构方程和平衡方程, 并最终根据虚功原理得到单元刚度矩阵。这不仅有助于对单元刚度矩阵以及推导过程的理解, 还可为参阅有限元专业书籍提供帮助。

关键词: 欧拉 - 伯努利梁; 单元刚度矩阵; 形函数; 基本方程

中图分类号: O3

文献标识码: A

文章编号: 1672-1144(2019)03-0089-05

Derivation of Element Stiffness Matrix of Euler - Bernoulli Beam Element

ZHANG Junfeng, YIN Huina, LI Jie, CHEN Huai

(School of Civil Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou, Henan 450001, China)

Abstract: The derivation process of element stiffness matrix of Euler-Bernoulli beam element was presented in detail in this paper. The derivation was based on the uniform coordinate and positive direction regulations of loads, displacements, internal forces and stresses. Following the detailed description of shape functions for tension, torsion and bending deformation, the basic equations including the geometric equations, physical equations and equilibrium equations were provided as well. Then the element stiffness matrix was deduced according to the principle of minimum potential energy. The complete and systematic derivation process is very helpful for understanding of element stiffness matrix.

Keywords: Euler-Bernoulli beam; element stiffness matrix; shape function; basic equation

梁理论有欧拉 - 伯努利 (Euler - Bernoulli) 梁和铁摩辛柯 (Timoshenko) 梁两种理论, 后者计入剪切变形而前者一般不计入剪切变形^[1], 前者又称为经典梁理论。现阶段常用的结构力学教程往往针对经典梁理论, 并在矩阵位移法中通过两端固结等截面梁的梁端位移与梁端支反力的关系给出梁单元的刚度矩阵^[2]。而在有限元理论中, 则是通过对单元变形指定合理的形函数并结合最小势能原理^[1,3]或虚功原理^[4]给出单元刚度矩阵。尽管最小势能原理与虚功原理是等价的^[3], 但推导方式仍有差异, 尤其是最小势能原理涉及变分原理而不便理解。另外, 部分文献并未给出完整坐标系统以及荷载、内力和位移的正方向, 不同文献所给坐标系统也不完全一致, 这

也不便理解其推导过程。

为系统介绍等截面梁刚度矩阵的推导过程, 基于欧拉 - 伯努利梁理论, 采用统一的坐标系统和参数正方向规定, 详细介绍了不同受力模式包括伸缩、扭转和弯曲问题的拉格朗日形函数或厄米特形函数, 系统给出了刚度矩阵推导所需的基本方程包括几何方程、本构方程和平衡方程, 并最终得到单元刚度矩阵, 以便深刻全面的理解梁单元刚度矩阵以及对梁结构受力特性的认识, 并有助于参阅其他专业书籍。

1 坐标系统与形函数

欧拉 - 伯努利梁理论基于 Kirchhoff 假设, 即假

定变形前垂直于中面的截面,变形后仍为平面且与中面保持垂直,或者说可忽略剪切变形的影响,适用于高度远小于跨度的梁^[1]。

以 xy 平面梁单元为例,图 1 给出了右手螺旋法则的坐标系,并针对伸缩、扭转和弯曲问题给出了对应的杆端荷载和分布荷载,所示荷载方向均与坐标轴正方向一致,也即荷载的正方向。图 1(c)还给出了截面内力正方向:轴力 F 以受拉为正,扭矩 T

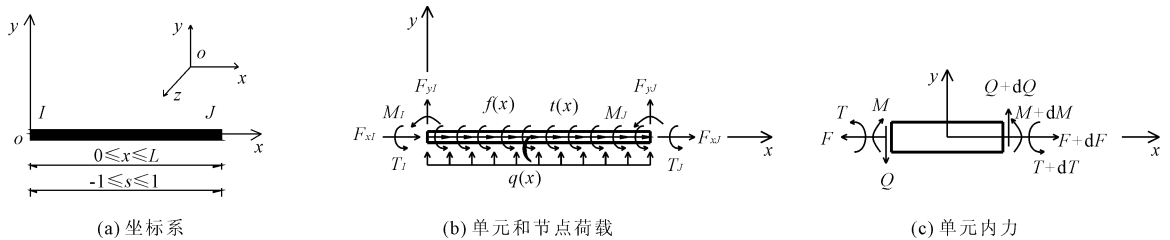


图 1 单元坐标系以及参量正方向示意图

形函数是用来表示结构变形形状的物理量,通过结点位移与结点之间单元的变形来表示整个结构的变形。形函数实际上就是数学上的插值函数,只是在有限元中又称形函数。常用的形函数有拉格朗日(Lagrange)形函数和厄米特(Hermite)形函数,众多有限元书籍以及 ANSYS 软件中的 Beam 4 单元对伸缩和扭转问题采用拉格朗日形函数,而对弯曲问题采用厄米特形函数。这也是因为这三种受力模式是非耦合的,故可以独立进行分析。对不同受力问题差值函数的构造过程可见文献^[3]。

对于所示 $x-y$ 平面内的两节点单元,其位移函数 ϕ 采用拉格朗日形函数表达式为:

$$\phi(x) = N\Phi = \sum_{i=1}^2 N_i(x)\phi_i \quad (1)$$

$$\phi(s) = N\Phi = \sum_{i=1}^2 N_i(s)\phi_i \quad (2)$$

$$s = \frac{x - x_c}{L/2} = \frac{2x - L}{L}, \quad x_c = \frac{L}{2} \quad (3)$$

$$N_1(x) = N_I(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2x - L}{L}\right) \quad (4)$$

$$N_2(x) = N_J(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2x - L}{L}\right)$$

$$N_1 = N_I = \frac{1}{2}(1 - s); \quad N_2 = N_J = \frac{1}{2}(1 + s) \quad (5)$$

$$N_i(x_j) = N_i(s_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2);$$

$$\sum_{i=1}^2 N_i(x) = \sum_{i=1}^2 N_i(s) = 1 \quad (6)$$

其中: i 表示结点编号 1 和 2(或 I 和 J); ϕ_i 表示 i 结点

的正方向与 F 方向一致,弯矩 M 以梁底(即 $-y$ 方向)纤维受拉为正,剪力 Q 以使微段发生逆时针转动为正。部分文献对单元刚度矩阵推导时,单元长度范围内还受有集中荷载,包括集中力和集中力矩,而实际对结构划分单元时往往在集中荷载位置均设置有节点,故图 1 中的单元没有再受集中力作用。另外,单元范围内的荷载也只影响最终的荷载向量而对刚度矩阵没有影响^[1,3-4]。

的位移,可表示轴向位移 u 或扭转角 θ ; s 为单元相对位置并取 $-1 \leq s \leq 1$ (见图 1、式(3)); L 为单元长度; x_c 为单元中点坐标。 $N_i(s)$ 和 $N_i(x)$ 表示拉格朗日形函数,且应满足式(6), x_j 和 s_j 为单元 j 节点的绝对坐标和相对坐标,其中 δ_{ij} 为 Kronecker 函数,并且式(6)中的前者是拉格朗日形函数本身的性质,后者则是差值函数完备性的要求^[1]。

另外, $N_i(s)$ 和 $N_i(x)$ 本质是相同的,只是表现形式不同(见式(4)、式(5)):如将式(5)中的相对坐标 s 替换为式(3)的关于 x 的函数,则可得式(4)即为关于杆件绝对坐标 x 的形函数,下文的厄米特形函数也同样如此。下文除对轴向位移给出两种形式的位移函数外(见式(7)),其他均以相对坐标 s 给出(见式(5)、图 2)。另外,本文采用的 s 取值方法也是 ANSYS 技术手册中采用的方式,但在部分文献^[1]中也常采用 $0 \leq s = x/L \leq 1$ 的形式,此时对应的形函数表达式会有变化,但并不影响最终所得单元刚度矩阵,在参阅时需注意。

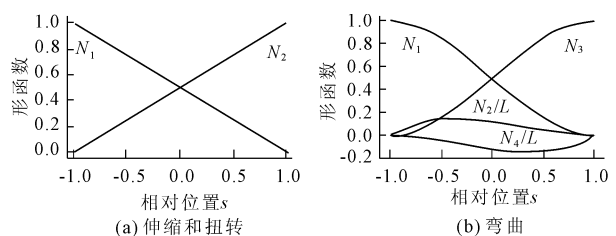


图 2 形函数示意图

式(4)、式(5)所示拉格朗日差值函数适用于单

元伸缩和扭转问题,由式(1)一式(5)可得轴向位移 u 和扭转角 θ_x 的位移函数分别如式(7)和式(8)所示:

$$u(x) = \sum_{i=1}^2 N_i(x) u_i = \frac{1}{2} \left[u_I \left(1 - \frac{2x-L}{L} \right) + u_J \left(1 + \frac{2x-L}{L} \right) \right]$$

$$u(s) = \sum_{i=1}^2 N_i(s) u_i = \frac{1}{2} \left[u_I (1-s) + u_J (1+s) \right] \quad (7)$$

$$\theta(s) = \sum_{i=1}^2 N_i(s) \theta_i = \frac{1}{2} \left[\theta_I (1-s) + \theta_J (1+s) \right] \quad (8)$$

两节点单元弯曲问题的竖向位移函数 ϕ 则采用厄米特形函数表示为:

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^2 H_i^{(0)}(x) \phi_i + \sum_{i=1}^2 H_i^{(1)}(x) \left(\frac{d\phi}{dx} \right)_i \quad (9)$$

$$\phi(s) = \sum_{i=1}^2 H_i^{(0)}(s) \phi_i + \sum_{i=1}^2 H_i^{(1)}(s) \left(\frac{d\phi}{ds} \right)_i \quad (10)$$

$$N_1 = H_I^{(0)}(s) = H_I^{(0)}(x) = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{s}{2} (3 - s^2) \right]$$

$$N_2 = H_I^{(1)}(s) = H_I^{(1)}(x) = \frac{L}{8} (1 - s^2) (1 - s)$$

$$N_3 = H_J^{(0)}(s) = H_J^{(0)}(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{s}{2} (3 - s^2) \right]$$

$$N_4 = H_J^{(1)}(s) = H_J^{(1)}(x) = -\frac{L}{8} \left[(1 - s^2) (1 + s) \right] \quad (11)$$

其中: ϕ_i 表示 i 结点竖向位移 ω ; $\left(\frac{d\phi}{dx} \right)_i$ 表示 i 结点的转角 α ,由此也可知弯曲变形的竖向位移和转角位移是耦合的; $H_i^{(0)}(x)$ 和 $H_i^{(1)}(x)$ (或 $H_i^{(0)}(s)$ 和 $H_i^{(1)}(s)$) 表示厄米特形函数(见式(11),图2(b)),其上标表示位移求导次数。

需要说明,不管采用绝对坐标还是相对坐标,形函数表达式(式(11))没有变化,这与描述伸缩与扭转问题的拉格朗日形函数一致。但当采用绝对坐标 x 时,厄米特形函数应满足式(12),又由式(2)可知有 $\frac{ds}{dx} = \frac{2}{L}$,也即 $\frac{d\phi}{dx} = \frac{d\phi}{ds} \frac{2}{L}$,故当采用相对坐标 s 时,应满足式(13),并且式(13)是由式(12)变形所得。部分文献对弯曲问题的厄米特形函数直接采用了相对坐标 s 的表达形式,但所给 $H_i^{(1)}(s)$ 形函数表达式以及其需要满足的条件表达式中缺失了分子 $L^{[1]}$,这实际上也是缺少位移函数 ϕ 的绝对坐标表

达式,未能深入理解对绝对坐标和相对坐标之间的关系。其实只要给出位移函数 ϕ 的绝对坐标表达式并明确转角 $\left. \frac{dH_i^{(1)}(x)}{dx} \right|_{x_j} = \delta_{ij}$,即可准确给出用相对坐标表示的形函数以及其需要满足的条件,也即式(11)和式(13),这也是文中用两种坐标形式给出位移函数的原因。另外,式(9)中的 $\left(\frac{d\phi}{dx} \right)_i$ 有明确的物理意义即 i 结点的转角 α ,但式(10)中的 $\left(\frac{d\phi}{ds} \right)_i$ 并无实际意义,只是统一为变量 s 的导数而已。

$$H_i^{(0)}(x_j) = \delta_{ij}, \left. \frac{dH_i^{(0)}(x)}{dx} \right|_{x_j} = 0 \quad (i, j = 1, 2) \quad (12)$$

$$H_i^{(1)}(x_j) = 0, \left. \frac{dH_i^{(1)}(x)}{dx} \right|_{x_j} = \delta_{ij}$$

$$H_i^{(0)}(s_j) = \delta_{ij}, \left. \frac{dH_i^{(0)}(s)}{ds} \right|_{s_j} = 0 \quad (i, j = 1, 2) \quad (13)$$

$$H_i^{(1)}(s_j) = 0, \left. \frac{dH_i^{(1)}(s)}{ds} \right|_{s_j} = \frac{L}{2} \delta_{ij}$$

为与节点自由度表示形式一致,对式(7)通常表示为:

$$\phi(x) = \sum_{r=1}^4 N_r(x) \psi_r \quad (14)$$

$$\phi(s) = \sum_{r=1}^4 N_r(s) \psi_r$$

其中: ψ_r 表示节点 I 和 J 的竖向位移 ω 和转角 α ; $N_r(s)$ 和 $N_r(x)$ 表示厄米特形函数(见式(11)),也即 $H_i^{(0)}(s)$ 和 $H_i^{(1)}(s)$ 、 $H_i^{(0)}(x)$ 和 $H_i^{(1)}(x)$; r 为插值函数编号;从而有竖向位移 ω 的函数即式(15)。

$$\omega(s) = \frac{1}{2} \left\{ \omega_I \left[1 - \frac{s}{2} (3 - s^2) \right] + \omega_J \left[1 + \frac{s}{2} (3 - s^2) \right] \right\} + \frac{L}{8} \left[\alpha_I (1 - s^2) (1 - s) - \alpha_J (1 - s^2) (1 + s) \right] \quad (15)$$

实际上,式(7)、式(8)和式(15)也正是 ANSYS 技术手册中所给的 Beam 4 单元位移函数表达式。为便于刚度矩阵分析,上述三式可统一用向量形式表达为:

$$\phi(s) = \mathbf{N}\boldsymbol{\Phi} = \sum_{r=1}^n N_r(s) \psi_r \quad (16)$$

其中: \mathbf{N} 和 $\boldsymbol{\Phi}$ 分别为形函数向量和节点位移列向量; ψ_r 表示节点 I 和 J 的位移,可分别为轴向位移 u 或扭转角 θ 、竖向位移 ω 和转角 α ; n 为独立节点位移数量;对于三类问题的各自取值分别为式(17)、式(18)、式(19),同时还给出了形函数向量 \mathbf{N} 相应的一

阶和二阶导数 N' 、 N'' ，并且其各阶导数依然为向量。

$$N = \left[\frac{1}{2}(1-s), \frac{1}{2}(1+s) \right]$$

$$\text{轴力问题: } N' = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \quad (17)$$

$$\Phi = [u_I, u_J]^T$$

$$N = \left[\frac{1}{2}(1 - \frac{s}{2}(3-s^2)), \frac{L}{8}(1-s^2)(1-s), \frac{1}{2}(1 + \frac{s}{2}(3-s^2)), -\frac{L}{8}(1-s^2)(1+s) \right]$$

$$\text{弯曲问题: } N' = \left[\frac{3}{4}(s^2-1), \frac{L}{8}(3s^2-2s-1), \frac{3}{4}(1-s^2), \frac{L}{8}(3s^2+2s-1) \right] \quad (19)$$

$$N'' = \left[\frac{3}{2}s, \frac{L}{4}(3s-1), -\frac{3}{2}s, \frac{L}{4}(3s+1) \right]$$

$$\Phi = [\omega_I, \alpha_I, \omega_J, \alpha_J]^T$$

2 刚度矩阵

由于梁单元的三种受力模式是非耦合的，故可以分别求得单一受力模式下的单元刚度矩阵，再综合为任意荷载模式下的单元刚度矩阵。不同文献对基于形函数的单元刚度矩阵推导过程并不一致，比如文献[1]利用最小势能原理进行推导，文献[3-4]还利用虚功原理进行了推导，但最终所得刚度矩阵的计算方法和具体表达式(表1中刚度矩阵计算

方法栏和刚度矩阵栏)是一致的。文献[3-4]还介绍了两种推导方法的等价性:两者本质上是一致的，但前者可以判断解的收敛性以及解的下限性质。由于推导过程过于复杂且在文献[1,3-4]有较为详细的过程，故下文不再给出，仅以虚功原理为例，基于图1所示坐标系和参数正方向，补充给出三种受力模式的几何方程、本构方程、截面内力、平衡方程、刚度矩阵计算过程及结果。

表 1 Beam 4 单元三种受力模式下的基本方程

受力模式	几何方程	本构方程	截面内力
伸缩	$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{dN}{dx}\Phi = B\Phi$ $B = \frac{dN}{dx} = \frac{2}{L}N'$	$\sigma_x = E\varepsilon_x = EB\Phi$ $\sigma_x = DB\Phi \quad (D = E)$	$F = \int_A \sigma_x dA = A\sigma_x$ $= \frac{2}{L}EAN'\Phi$ $F = EA \frac{du}{dx}$
扭转	$\beta = \frac{d\theta}{dx}$ $\gamma_t = \rho \frac{d\theta}{dx} = \rho \frac{dN}{dx}\Phi = B\Phi$ $B = \rho \frac{dN}{dx} = \rho \frac{2}{L}N'$	$\tau_t = G\gamma_t = GB\Phi$ $\tau_t = DB\Phi \quad (D = G)$	$T = \int_A \tau_t \rho dA = G \frac{2}{L} \int_A \rho^2 dA N'\Phi$ $= GJ \frac{2}{L} N'\Phi \quad (\int_A \rho^2 dA = J)$ $T = GJ\beta = GJ \frac{d\theta}{dx} = GJ \frac{2}{L} \frac{d\theta}{ds}$
弯曲	$\alpha = \frac{d\omega}{dx}; \kappa = -\frac{d\alpha}{dx} = -\frac{d^2\omega}{dx^2}$ $\varepsilon_b = \kappa y = -y \frac{d^2\omega}{dx^2} = -y \frac{d^2N}{dx^2}\Phi = B\Phi$ $B = -y \frac{d^2N}{dx^2} = -y \frac{4}{L^2}N''$	$\sigma_b = E\varepsilon_b = EB\Phi$ $\sigma_b = DB\Phi \quad (D = E)$	$M = -\int_A \sigma_b y dA = E \frac{4}{L^2} \int_A y^2 dA N''\Phi$ $= \frac{4EI}{L^2} N''\Phi \quad (\int_A y^2 dA = I)$ $M = -EI\kappa = EI \frac{d^2\omega}{dx^2} = \frac{4EI}{L^2} \frac{d^2\omega}{ds^2}$

受力模式	内外力平衡方程	刚度矩阵	节点荷载向量
伸缩	$\frac{d}{dx}(A\sigma_x) = AE \frac{d^2u}{dx^2} = -f(x)$		$F^e = [F_{xI}, F_{xJ}]^T$
扭转	$\frac{dT}{dx} = GJ \frac{d^2\theta}{dx^2} = -t(x)$ $Q = -\frac{dM}{dx} = -EI \frac{d^3\omega}{dx^3}$	由虚功原理得刚度矩阵: $F^e = \int_V B^T DB dV \Phi \Rightarrow$ $K^e = \int_V B^T DB dV$	$F^e = [T_I, T_J]^T$
弯曲	$\frac{dQ}{dx} = -EI \frac{d^4\omega}{dx^4} = -q(x)$ $\frac{d^2M}{dx^2} = q(x)$		$F^e = [F_{xI}, M_I, F_{xJ}, M_J]^T$

受力模式	刚度矩阵计算过程	刚度矩阵
伸缩	$\begin{aligned} \mathbf{K}^e &= \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV = \frac{4}{L^2} \int_0^L \mathbf{A} \mathbf{N}^T \mathbf{E} \mathbf{N} dx \\ &= \frac{4EA}{L^2} \int_0^L \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx = \frac{2EA}{L} \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \mathbf{N} ds \end{aligned}$	$\mathbf{K}^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$
扭转	$\begin{aligned} \mathbf{K}^e &= \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV = \frac{4}{L^2} \int_0^L \mathbf{J} \mathbf{N}^T \mathbf{G} \mathbf{N} dx \\ &= \frac{4GJ}{L^2} \int_0^L \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx = \frac{2GJ}{L} \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \mathbf{N} ds \end{aligned}$	$\mathbf{K}^e = \frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$
弯曲	$\begin{aligned} \mathbf{K}^e &= \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV = \frac{16}{L^4} \int_V y \mathbf{N}^T E_y \mathbf{N} dV \\ &= \frac{16}{L^4} \int_0^L \mathbf{I} \mathbf{N}^T \mathbf{E} \mathbf{N} dx = \frac{16EI}{L^4} \int_0^L \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx \\ &= \frac{8EI}{L^3} \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \mathbf{N} ds \end{aligned}$	$\mathbf{K}^e = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$

注:曲率 κ 本身应为正值,但为适应应变计算还是对其给出了符号。整个表格中的 \mathbf{N} 和 \mathbf{B} 均为绝对坐标 x 的函数, \mathbf{N}' 、 \mathbf{N}'' 为相对坐标 s 的表达式。刚度矩阵计算过程一栏中,倒数第二个等式仅针对等截面杆件;最后一个等式对不同相对坐标 s 的形式(即 $-1 \leq s \leq 1$ 或 $0 \leq s \leq 1$) 所得表达式会有差异,但不影响最终所得刚度矩阵。

表 1 中: u 、 θ 、 ω 分别表示轴向位移、扭转角和挠曲位移; β 和 α 分别为扭矩作用下单位长度的扭转角和弯矩作用下的截面转角; ϵ 和 σ 分别为正应变和正应力,下标 x 和 b 分别表示轴力和弯矩作用; γ 和 τ 分别为剪应变和剪应力,下标 t 和 b 分别表示扭矩和弯矩作用; E 和 G 为弹性模量和剪切模量,且有式(20), μ 为泊松比; A 、 J 、 I 表示截面面积、极惯性矩和抗弯惯性矩; y 为偏离截面中性轴的坐标值; ρ 为距离截面扭心的距离。 \mathbf{F}^e 和 \mathbf{K}^e 分别为对应受力模式的荷载向量和单元刚度矩阵,节点位移列向量 Φ 同样是在单元坐标系下的位移。 \mathbf{N} 、 \mathbf{B} 分别为形函数向量和应变转换向量,并且对不同受力模式的取值是不同的(见式(17)、式(18)、式(19)),只是为使形式统一而采用了相同的符号。对于各向同性材料的一维线单元,应力与应变之间的弹性矩阵 \mathbf{D} 对正应力和剪应力分别为 E 和 G ; 如果是二维壳单元或三维实体单元,则 \mathbf{D} 将是一个矩阵^[1]。

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (20)$$

需要注意,文献[1]第 9.2 节对三种受力模式刚度矩阵推导中,因没有明确说明荷载、位移以及内力等的正方向,使得部分内容前后不一和不便理解。比如,对轴力和扭转受力问题,在文献[1]图示中可知其对上述参数正方向的规定与本文一致,然而其对平衡方程的描述却写为 $\frac{d}{dx}(A\sigma_x) = f(x)$ 和 $\frac{dT}{dx} = t(x)$,即错误地少写了一个负号,参阅时需要注意。文献[4]第 3.6 节对梁受弯问题的刚度矩阵的推导中,没有详细给出几何方程和本构方程,直接令

$\mathbf{B} = \mathbf{N}'$ 和 $\mathbf{D} = EI$,这虽不影响最终刚度矩阵的结构,但从表 1 可知其将应变转换向量 \mathbf{B} 和弹性矩阵 \mathbf{D} 进行了合并表达。

另外,最终根据形函数所得刚度矩阵与结构力学方法所得刚度矩阵完全一致,这也说明用形函数(式(17)、式(18)、式(19))表示的位移函数 ϕ 是真实的,满足理论解。当然,如果所用形函数是近似的,所得刚度矩阵也与结构力学方法所得刚度矩阵不一致;对于弯曲问题如果同样采用拉格朗日形函数就会出现这样的结果。鉴于三种受力模式的独立性,将表 1 所列各自刚度矩阵综合在一起则可得式(21),其对应的总体刚度矩阵、节点荷载向量和位移向量如式(22)所示。

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{K}^e \Phi^e \quad (21)$$

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 12 \frac{EI}{L^3} & 6 \frac{EI}{L^2} & 0 & 0 & -12 \frac{EI}{L^3} & 6 \frac{EI}{L^2} & 0 & 0 \\ 4 \frac{EI}{L} & 0 & 0 & 0 & -6 \frac{EI}{L^2} & 2 \frac{EI}{L} & 0 & 0 \\ \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 \frac{EI}{L^3} & -6 \frac{EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 \frac{EI}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}^e = [F_{xI}, F_{yI}, M_I, T_I, F_{xJ}, F_{yJ}, M_J, T_J]^T \quad (22)$$

$$\Phi^e = [u_I, \omega_I, \alpha_I, \theta_I, u_J, \omega_J, \alpha_J, \theta_J]^T$$

3 结 论

(1) 珊瑚砂微生物固化试验中各因素对固化体抗压强度影响的主次顺序为:颗粒粒径、脲酶活性、底物溶液配比、底物溶液浓度,其对应值为颗粒粒径取 C 组(粗粒组),脲酶活性取 2.0 mmol/(L·min),底物溶液配比取 0.75:1,底物溶液浓度取 1 mol/L。

(2) 珊瑚砂微生物固化试验中各因素对固化体干密度增量影响的主次顺序为:脲酶活性、颗粒粒径、底物溶液配比、底物溶液浓度,其对应值为颗粒粒径取 C 组(粗粒组),脲酶活性取 1.5 mmol/(L·min),底物溶液配比取 0.75:1,底物溶液浓度取 1 mol/L。

(3) 珊瑚砂微生物固化试验最优固化条件为颗粒粒径取 C 组(级配良好的较粗粒组),脲酶活性取 1.85 mmol/(L·min),底物溶液配比取 0.75:1,底物溶液浓度取 1 mol/L。

参考文献:

- [1] 方祥位,申春妮,楚 剑,等.微生物沉积碳酸钙固化珊瑚砂的试验研究[J].岩土力学,2015,36(10):2773-2779.
- [2] 钱春香,王安辉,王 欣.微生物灌浆加固土体研究进展[J].岩土力学,2015,36(6):1537-1548.
- [3] 荣 辉,钱春香,李龙志.微生物水泥胶结机理[J].硅酸盐学报,2013,41(3):314-319.
- [4] 崔明娟,郑俊杰,章荣军,等.化学处理方式对微生物固化砂土强度影响研究[J].岩土力学,2015,36(S1):392-396.
- [5] Ehrlich H L. Microbes as geologic agents: their role in min-

eral formation[J]. Geomicrobiology Journal, 1999, 16(2): 135-153.

- [6] DeJong J T, Mortensen, B M, Martinez, B C, et al. Bio-mediated soil improvement [J]. Ecological Engineering, 2010,36(2):197-210.
- [7] 欧益希,方祥位,张 楠,等.溶液盐度对微生物固化珊瑚砂的影响[J].后勤工程学院学报,2016,32(1):78-82.
- [8] 欧益希,方祥位,申春妮.颗粒粒径对微生物固化珊瑚砂的影响[J].水利与建筑工程学报,2016,14(2):35-39.
- [9] 李 捷,方祥位,申春妮,等.含水率对珊瑚砂微生物固化体力学特性影响研究[J].工业建筑,2016,46(12):93-97.
- [10] 李 捷,方祥位,申春妮,等.颗粒级配对珊瑚砂微生物固化影响研究[J].水利与建筑工程学报,2016,14(6):7-12,43.
- [11] 李 捷,方祥位,张 伟,等.菌液脲酶活性对珊瑚砂微生物固化效果的影响[J].后勤工程学院学报,2016,32(6):88-91,96.
- [12] 宋 平,方祥位,李洋洋.纤维掺量对珊瑚砂微生物固化体力学性能的影响[J].兵器装备工程学报,2017,38(10):156-160.
- [13] 土的工程分类标准:GB/T 50145—2007[S].北京:中国计划出版社,2008.
- [14] 郑少华,姜奉华.试验设计与数据处理[M].北京:中国建材出版社,2004.
- [15] 欧益希.珊瑚砂微生物固化技术研究[D].重庆:后勤工程学院,2016.
- [16] Taguchi G. The Experimental Design Method[M]. 3rd. Tokyo: Maruzen Pub., 1976.
- [17] 盖钧镒.试验统计方法[M].北京:中国农业出版社,2000.

(上接第 93 页)

3 结 论

梁单元刚度矩阵是结构力学中的一个重要内容,本文对等截面梁,基于欧拉-伯努利梁理论,采用统一的坐标系统和参数正方向规定,详细介绍了各种受力模式的形函数,系统给出了等截面梁的刚度矩阵推导过程,为配合有限元专业文献的理解提供了参考。

参考文献:

- [1] 王勖成.有限单元法[M].北京:清华大学出版社,2003:302-322.
- [2] 龙驭球,包世华.结构力学:下册[M].2版.北京:高等教育出版社,1996:74-116.
- [3] 王焕定,焦兆平.有限单元法基础[M].北京:高等教育出版社,2002:25-46.
- [4] 朱伯芳.有限单元法原理与应用[M].4版.北京:中国水利水电出版社,2003:1-132.