

DOI:10.3969/j.issn.1672-1144.2019.01.002

带电性黏土介质多离子体系扩散模型

张志红¹, 巨占莹¹, 田改奎¹, 郭飞²

(1. 北京工业大学 建筑工程学院, 北京 100124;

2. 北京市政建设集团有限责任公司, 北京 100048)

摘要: 污染物在黏土防渗层中扩散时, 不仅需考虑污染物离子自身活性, 还须考虑黏土介质自身带负电特性这一离子存在环境对扩散进程的影响。通过对电场作用下的活度系数进行修正并引入电化学势描述方程, 建立了适用于带电性黏土介质的基于动量平衡的多离子体系扩散模型。由于所建模型的复杂性, 选用多物理场仿真软件 COMSOL Multiphysics 开展数值模拟, 揭示了多离子体系在黏土垫层中的运动规律。数值结果表明: 随着污染物离子初始浓度的增大, 考虑土体带电特性及离子活性对扩散进程的阻滞效果越来越明显。

关键词: 多离子体系; 扩散; 活度; 动量平衡; 黏土

中图分类号: TU442

文献标识码: A

文章编号: 1672-1144(2019)01-0013-06

Diffusion Model of Multi-ions System in Charged Clay Medium

ZHANG Zhihong¹, JU Zhanying¹, TIAN Gailei¹, GUO Fei²

(1. College of Architecture and Civil Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China;

2. Beijing Municipal Construction Co., Ltd., Beijing 100048, China)

Abstract: When the contaminant diffuses in the clay impermeable layer, it is necessary to study not only the activity of the contaminant ions, but also the influence of clay materials carried with negative charge on the diffusion process of contaminant ions. In this study the activity coefficient was modified under the action of electric field and the electrochemical potential description equation was introduced, finally a multi-ion system diffusion model for charged clay media was proposed based on momentum balance. The finite element software COMSOL Multiphysics was used to conduct numerical simulation to reveal the motion law of multi-ion system in clay liner. The numerical results show that the block effects considering charged clay and ions activity on diffusion process become more and more obvious with the increase of initial concentration of contaminant ions.

Keywords: multi-ions system; diffusion; activity; momentum balance; clay soil

扩散是海水入侵、地热开发、核废料处置等领域中存在的重要作用机制^[1-4]。在对固体废物进行填埋处置的工程中, 多采用天然防渗和人工防渗屏障。众所周知, 黏土衬垫层作为一类天然防渗屏障, 具有极低的渗透性能, 极大限制了水分迁移速率, 在渗滤液中各类离子向周围水土环境的运动过程中, 分子扩散是主要的运移形式。当渗滤液在带电的黏土垫层中扩散时, 其扩散行为将会受到黏土负电场的影

响。且各类堆场渗滤液中多组分溶质共存, 须考虑黏土体的带电特性对多组分溶质并存时各组分活度系数的影响。因此开展多离子体系在带电黏土防渗衬垫层中扩散规律的研究能够有效评估填埋场防渗系统的服役性能。

Du 等^[5]、席永慧等^[6]通过开展室内黏土介质扩散试验, 测定了离子的扩散系数, 结果表明混合盐溶液中离子扩散系数小于单一盐溶液测得的结果。陈

云敏等^[7]和谢海建等^[8-9]针对污染物在成层土体中的扩散开展了深入研究,给出了层状土体中一维污染物扩散模型的解析解。巨占莹等^[10]通过引入能够表征离子真实有效浓度的活度系数,建立了适用于黏土防渗层的多组分体系扩散模型。张志红等^[11]采用平均体积技术建立了多离子体系在黏土垫层中的扩散模型。Rhue^[12]根据不可逆热动力学,耦合离子交换作用,运用 Nemst - planck 方程,得到了同时考虑浓度梯度和电位梯度的通量方程。韩光泽等^[13]利用 Maxwell—Stefan (MS) 方程研究了电场作用下球形颗粒的扩散过程,结果表明,该方程可以对电场强化质量传递过程给出有效描述。Rolle 等^[14]研究了电场力对多孔介质中对流占主导作用的多离子运移过程的影响,结果表明电场力是影响多离子在多孔介质中运移的重要因素。Muniruzza-man 等^[15]对电场作用下的多组分带电粒子在均质多孔介质中的扩散过程进行了试验和模拟,该扩散模型通过库仑定律表达带电组分扩散通量间的耦合作用,考虑了均质介质中带电粒子间的相互作用。已有扩散模型数值模拟未体现离子扩散的外部环境即黏土带电特性对活度系数及扩散过程的影响。

本文基于引入组分有效活度的混合物组分线性动量平衡,对电场作用下的活度系数进行了修正,从而得到了土体负电场作用下离子活度系数的修正方程,通过引入电化学势描述方程,构建了多离子在带电黏土介质中的扩散模型,从而能够真实体现多离子共存及黏土介质带电对扩散进程的影响。

1 模型建立

本文模型建立采用了巨占莹等^[10]给出的基本假定。

1.1 活度系数修正

电解质溶液理论是研究溶液化学性质领域的基础理论,在环境土工方向如在研究填埋场渗滤液在黏土防渗垫层中的扩散机理时也同样适用。当渗滤液中污染物离子在带电性黏土垫层中运动时,需要考虑外界环境对溶质离子活性的影响,即需要考虑黏土体的负电场环境对离子活度系数的影响。

以德拜 - 休格尔活度系数模型为基础,忽略土体电场作用时,中心阳离子与球形对称的阴离子氛相对应。但在电场作用下,中心离子和离子氛均受到电场力的作用,离子氛对称性遭到破坏,将形成

“不对称离子氛”的存在形态,如图 1 所示。

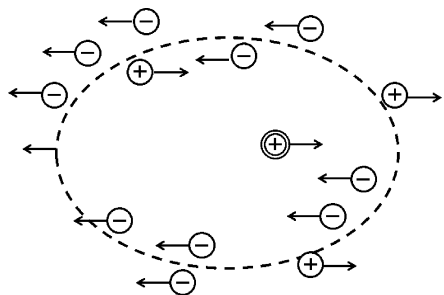


图 1 不对称离子氛示意图

昂萨格于 1927 年将德拜 - 休克尔理论应用至存在外加电场作用的电解质溶液,形成了德拜 - 休克尔 - 昂萨格电导理论。在电场作用下构成非对称离子氛,中心阳离子和阴离子氛向相反方向移动。当中心离子运动时,由于离子间的相互作用会额外受到松弛力和电泳力的两种阻力作用。

(1) 松弛力 f_R 。在电场作用下,由于中心离子持续运动导致的不可恢复离子氛对称性,对中心离子迁移产生一种相反方向的阻力称为松弛力 f_R 。

$$f_R = \frac{e^3 z_i \chi}{6 D k T} \omega V \quad (1)$$

松弛阻力 f_R 与离子氛的半径 $(\frac{1}{\chi})$ 成正比,与溶液的介电常数 D 及绝对温度 T 成反比。 ω 是一参数, V 是外加电势梯度; κ 为玻尔兹曼常数, T 为绝对温度。

(2) 电泳力 f_P 。在电场作用下,由于离子氛中阴离子携带较多水分子,导致中心离子迁移速率因受阻而降低,该阻力称为电泳力 f_P 。

$$f_P = \frac{e z_i \chi}{6 \pi \eta} k_i V \quad (2)$$

由式(1)和式(2)可知,松弛力与电泳力是电解质溶液从无外场到有外加电场产生的力。通过在活度系数中引入 f_R 和 f_P ,能够体现土体带电特性对离子活度的影响,进而更加准确的描述离子在土体中的扩散过程。

在德拜 - 休克尔理论中,泊松 - 玻尔兹曼方程式为

$$\nabla^2 \varphi = - \frac{4\pi}{D} \rho \quad (3)$$

式中: D 为介电常数; φ 为电势。

体积元的电荷密度为

$$\rho = \sum e z_i n_i e^{-\frac{e z_i \varphi}{\kappa T}} \quad (4)$$

式中: ez_i (e 为元电荷, z_i 为离子价数) 为溶液第 i 种离子的离子电荷。

引入土体的负电场特性, 设土体内部某点电势为 φ_0 , 则任意体积单元内的电荷密度可表示为

$$\rho = \sum ez_i n_i e^{-\frac{1}{\kappa T} (ez_i \varphi - \frac{e^3 z_i \chi}{6DkT} \omega \varphi_0 - \frac{ez_i \chi}{6\pi\eta} k_i \varphi_0)} \quad (5)$$

由此泊松方程式(3)可化为

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{4\pi e}{D} \sum z_i n_i e^{-\frac{1}{\kappa T} (ez_i \varphi - \frac{e^3 z_i \chi}{6DkT} \omega \varphi_0 - \frac{ez_i \chi}{6\pi\eta} k_i \varphi_0)} \quad (6)$$

展开级数简化得到:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{4\pi e^2}{D\kappa T} \sum z_i^2 n_i \varphi - \frac{4\pi \chi e^2}{6DkT} \sum z_i^2 n_i \left(\frac{e^2 \omega}{DkT} + \frac{k_i}{\pi\eta} \right) \varphi_0 \quad (7)$$

令

$$B_1 = \frac{4\pi \chi e^2}{6DkT} \sum z_i^2 n_i \left(\frac{e^2 \omega}{DkT} + \frac{k_i}{\pi\eta} \right) \quad (8)$$

式(7)可简化为

$$\nabla^2 \varphi = \chi^2 \varphi - B_1 \varphi_0 \quad (9)$$

求微分方程式(9)的通解, 即可得到在距离中心离子 r 处由离子氛和中心离子产生的平均电位值 φ 为

$$\varphi = \frac{ez_i e^{-\chi r}}{Dr} + \frac{B_1 \varphi_0}{\chi^2} \quad (10)$$

真实溶液是由离子氛电位值来表示其特征的, 而离子氛电位 φ_{ia} 值应用电位叠加定律且作为 φ 和 φ_i 的差可以求得

$$\varphi_{ia} = \varphi - \varphi_i = \frac{ez_i}{Dr} (e^{-\chi r} - 1) \quad (11)$$

为了计算离子氛与中心离子之间的相互作用能, 需要确定中心离子位置上的离子氛电位, 即求出当 $r \rightarrow 0$ 时 φ_{ia} 的极限值。指数函数展开成级数, 忽略其高次项, 可得

$$\varphi_{ia, r \rightarrow 0} \rightarrow \varphi' = -\frac{ez_i}{D\chi} + \frac{B_1 \varphi_0}{\chi^2} \quad (12)$$

在德拜 - 休格尔理论的初级近似中, 假定离子的相互作用起源于静电作用。因此可定义为离子云电场对中心离子充电的能量。众所周知, 一个质点在电场中从零电荷到 q 电荷的充电能应等于

$$\int_0^q \varphi dq = \frac{1}{C} \int_0^q q dq = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} q\varphi \quad (13)$$

式(13)中 $q = C\varphi$, C 是电容。

将中心离子的电荷值作为 q 代入式(13), 并用式(12)中的 φ' 来代替 φ , 则得到如下充电能量的表示式。该充电能量等于中心离子和离子氛之间的相互作用能:

$$g_i = -\frac{ez_i}{2} \left(\frac{ez_i}{D\chi} \right) = -\frac{e^2 z_i^2}{2D\chi} \quad (14)$$

又

$$\kappa T \ln r_i = g_i^* \quad (15)$$

结合式(14)和式(15), 得到 i 种离子在土体电场影响下的活度系数计算公式:

$$\ln r_e^i = -\frac{e^2 z_i^2}{2D\kappa T \chi} + \frac{ez_i B_1 \varphi_0}{2\kappa T \chi^2} \quad (16)$$

式中 r_e^i 定义为电活度系数。离子氛的半径 ($\frac{1}{\chi}$) 为

$$\chi = \sqrt{\frac{4\pi e^2}{D\kappa T} \sum z_i^2 n_i} \quad (17)$$

将式(17)代入式(16), 并采用摩尔浓度单位代替单位体积内的质点数表示溶液的组成, 得到 i 离子活度系数表达式:

$$\ln r_e^i = -\frac{e^3 z_i^2}{(D\kappa T)^{3/2}} (\pi \sum n_i z_i^2)^{1/2} + \frac{125 D z_i B_1 \varphi_0}{e\pi N_A \sum c_i z_i^2} \quad (18)$$

式(18)右侧第二项反映了土体外加电场对活度系数的影响, 将该影响项代入到原活度系数表达式中, 可得到

$$\log r_e^i = -\frac{0.51 z_i^2 \sqrt{I}}{1 + \sqrt{I}} + \frac{125 D z_i B_1 \varphi_0}{e\pi N_A \sum c_i z_i^2} \times \log e \quad (19)$$

将式(8) B_1 代入式(19), 并将每立方米的摩尔数换算成浓度单位, 得到

$$\log r_e^i = -\frac{0.51 z_i^2 \sqrt{I}}{1 + \sqrt{I}} + \frac{ez_i \chi \varphi_0}{12} \left(\frac{e^2 \omega}{DkT} + \frac{k_i}{\pi\eta} \right) \times \log e \quad (20)$$

土体中电势可以用 Poisson 方程来描述:

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \epsilon_f \nabla \varphi_0) = \rho_f \quad (21)$$

式中: ϵ_0 为真空介电常数; ϵ_f 为孔隙液相的相对介电常数(无量纲), 液相为水溶剂。孔隙液相电荷密度为

$$\rho_f = F \sum_{i=1}^N z_i c_i \quad (22)$$

将式(22)代入式(21)得到土体电势的描述方程

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \epsilon_f \nabla \varphi_0) = F \sum_{i=1}^N z_i c_i \quad (23)$$

联立式(20)与式(23), 即可得黏土体负电场影响下的修正活度系数。

1.2 考虑黏土带电特性的多离子体系扩散模型

在空间位置 r 和 t 时刻, 若黏土液相(孔隙水)中污染物由 m 种组分构成, 则多组分混合物中 i 组分的动量平衡方程可写成如下形式:

$$r_e^f \rho_i \frac{Dv^f_i}{Dt} + r_e^f \rho_i \nabla_{T, \mu} \mu_e^f + r_e^f \rho_i \bar{V}_i \nabla p - \nabla \cdot \tau^f_i - r_e^f \rho_i g^f_i$$

$$= - r_e^f \rho_i \left[\sum_{j=1}^m \frac{r_e^f \rho_i RT}{D_{ij}} (v^f_i - v^f_j) \right] - \frac{r_e^f \rho_i RT}{D_{is}} v^f_i \quad (24)$$

式中： r_e^f 是液相中 i 组分的活度系数； ρ_i 是 i 组分的质量密度； v_i 是 i 组分运动速度； $\nabla_{T, \mu} \mu_e^f$ 为 i 组分在等温等压时的电化学势梯度； \bar{V}_i 是 i 组分的摩尔体积； p 为压强； τ^f_i 为 i 组分的部分偏应力张量； g^f_i 是作用在单位质量 i 组分上的外部体力； v_j 是 j 组分运动速度； D_{ij} 是 i 组分与其它组分 j 的扩散系数； D_{is} 是 i 组分与多孔介质骨架间摩擦的扩散系数。

等温等压情况下，组分 i ($i = 1, \dots, N + 1$) 的电化学势梯度可表示为：

$$\nabla_{T, \mu} \mu_e^f = RT \nabla \ln r_e^f + RT \nabla \ln x_i + z_i F \nabla \varphi_0 \quad (25)$$

多组分污染物离子扩散方程式(24)与电势梯度式(25)，结合活度系数表达式(20)、式(23)，四式联立共同构成了黏土负电场影响下的多离子体系扩散模型。

2 数值模拟

2.1 基本假设及定解条件

为便于求解，作出如下假设：

- (1) 固废底部分别为黏土层和不透水层，如图 2 所示。
- (2) 土层单面(上表面)排水。
- (3) 不考虑土体中污染物的背景浓度。

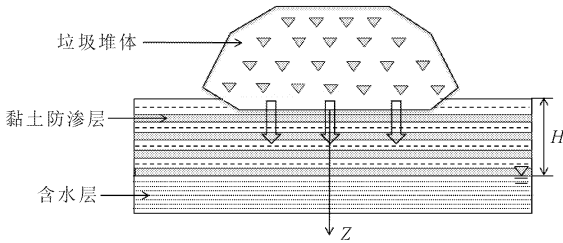


图 2 黏土层中污染物扩散示意图

多组分污染物离子扩散模型定解条件如下：

初始条件： $\rho_i(z, 0) = 0, 0 \leq z \leq H$

边界条件： $\rho_i(0, t) = \rho_{i0}, \frac{\partial \rho_i(H, t)}{\partial z} = 0, t \geq 0$

其中： H 表示黏土层厚度； ρ_{i0} 为 i 组分边界质量浓度。

2.2 参数选取

本文主要模拟对象为填埋场渗滤液，选取两种代表性重金属离子 Cu^{2+} 和 Ni^{2+} 开展研究。模型参数选取见表 1。

表 1 模型参数

参 数	取值
初始边界浓度/($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)	1.00
模拟年限/a	20.00
土层厚度/m	2.00
饱和土体孔隙比	0.80
饱和土颗粒密度/($\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$)	2.72
饱和土体孔隙率	0.44
多孔介质弯曲因子	0.30
Cu^{2+} 扩散系数 $D_{ij}/(\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1})$ ^[16]	7.13×10^{-10}
Cu^{2+} 扩散系数 $D_{is}/(\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1})$ ^[16]	1.50×10^{-10}
Ni^{2+} 扩散系数 $D_{ij}/(\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1})$ ^[16]	6.79×10^{-10}
Ni^{2+} 扩散系数 $D_{is}/(\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1})$ ^[16]	1.00×10^{-10}

本文数值模拟的活度系数取值见表 2。

表 2 溶质扩散时的活度系数取值情况

工况	活度系数情况	活度系数取值	代表符号
	理想溶液	1	$r_i = 1$
组分间摩擦/带电荷性	不考虑	$\log r_i = -\frac{0.51 z_i^2 \sqrt{I}}{1 + \sqrt{I}}$	$r_i \neq 1$
组分间且组分与骨架间摩擦	考虑带电荷性的修正	$\log r_e^f = \frac{0.51 z_i^2 \sqrt{I}}{1 + \sqrt{I}} + \frac{ez_i \chi \varphi_0}{12} \left(\frac{e^2 \omega}{DKT} + \frac{k_i}{\pi \eta} \right) \times \log e$	r_e^f

2.3 数值结果分析

为简化计算，忽略惯性力、部分偏应力以及外部体力项。采用多物理场仿真软件 COMSOL 对所建模型进行数值求解，针对 9 种工况模拟了黏土土层中 Cu^{2+} 浓度和 Ni^{2+} 浓度的时空分布规律。具体工况说明见表 3。

表 3 工况说明

工况 1	工况 2	工况 3	工况 4	工况 5	工况 6	工况 7	工况 8	工况 9
Fick 定律	$r_i = 1, F_1$	$r_i = 1, F_1 + F_2$	$r_i \neq 1, F_1$	$r_i \neq 1, F_1 + F_2$	r_e^f, F_1, μ_e^f	$r_e^f, F_1 + F_2, \mu_e^f$	r_e^f, F_1	$r_e^f, F_1 + F_2$

注： F_1 表示组分离子间的摩擦作用； $F_1 + F_2$ 表示组分离子与骨架壁间的摩擦作用； μ_e^f 表示考虑电势。

由模拟结果可知,不同工况下的离子浓度随土层深度的变化规律总体趋势相似。在扩散初期如 $t = 2$ a时,各土层深度处,相同摩擦条件下,考虑溶液非理想性且忽略土体带电性影响(工况 4)的数值结果与考虑带电性影响的扩散模型(工况 8)数值结果接近,且两者均小于理想溶液扩散模型(工况 2)的 Cu^{2+} (Ni^{2+}) 的浓度,并且后者与考虑带电性影响并引入电化学势梯度的模型(工况 6)的 Cu^{2+} (Ni^{2+}) 的浓度非常接近。随着时间的推移,各工况扩散进程的区别逐渐凸显。在 $t = 20$ a时,各土层深度处,相同摩擦条件下,考虑溶液非理想性且忽略土体带电性影响的扩散模型(工况 4)得到的 Cu^{2+} (Ni^{2+}) 浓度与考虑带电性影响的扩散模型(工况 8)数值结果较为相似,且两者均小于理想溶液离子活度系数模型(工况 2)的 Cu^{2+} (Ni^{2+}) 浓度,三者均小于考虑带电性修正的离子活度系数以及引入电化学势梯度扩散模型(工况 6)的 Cu^{2+} (Ni^{2+}) 浓度。由此可见,相同扩散时刻、扩散深度及摩擦作用条件下,考虑真实溶液的溶质扩散浓度小于理想溶液溶质扩散的浓

度。由此表明考虑离子活性的非理想性时, Cu^{2+} 和 Ni^{2+} 的扩散滞后于考虑离子活性的理想活性时对应离子的扩散过程。由模拟结果可知,离子活度系数的引入与否对其扩散过程具有重要影响。

在相同的扩散时刻,不同土层深度处,摩擦作用相同的条件下,考虑土体的带电性,即电势梯度的引入能够加速渗滤液中重金属阳离子在黏土垫层中的扩散。在同一溶质的浓度变化曲线图中,对比 2 a、5 a、10 a、20 a 的模拟结果可知,随着扩散时间的增加,考虑土体带电性影响的溶质浓度(工况 6)与理想溶液的溶质浓度曲线(工况 2)之间逐渐变得稀疏,表明随着时间的增加,土体中电势梯度的作用逐渐增强。

实际工程中,垃圾堆场渗滤液中污染物浓度相对较大,为了更清晰的比较土体带电性对活度系数的影响程度,取溶质初始浓度为 10 mol/m^3 ,其余模型参数不变,模拟两种工况下黏土垫层中 Cu^{2+} 浓度和 Ni^{2+} 浓度的时空分布规律。两种工况为工况 4 和工况 8,模拟结果如图 3 所示。

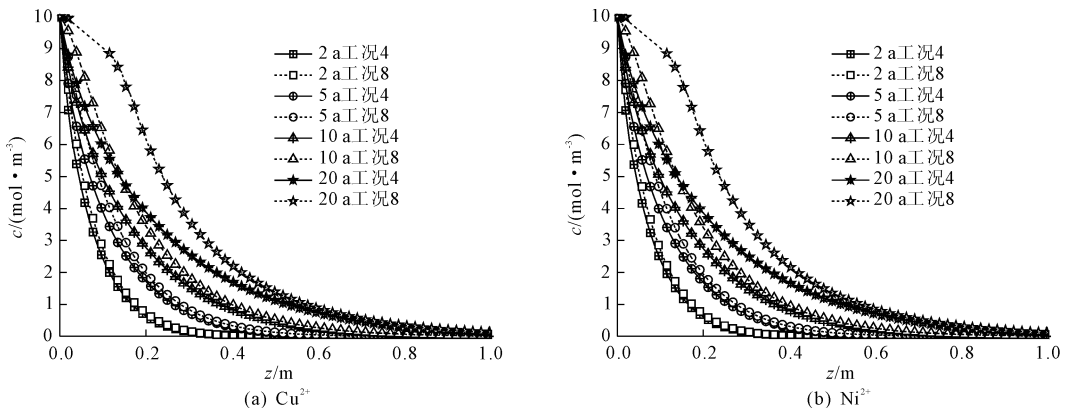


图 3 不同年限离子浓度随深度变化曲线

由图 3 可以看出,在同一扩散年限,考虑离子活性的非理想性时,忽略土体带电性的离子活度系数的溶质扩散浓度小于考虑土体带电性修正的离子活度系数的溶质扩散浓度。在扩散初期差距相对较小,但随着扩散年限的增加,滞后效果越来越明显。在溶质浓度越大的情况下,考虑带电修正活度系数的离子扩散浓度相较于忽略带电性离子活度系数的离子扩散浓度的差别效果更明显。由此可见,离子间摩擦作用、离子与骨架壁间摩擦作用,离子活性和土体本身电势梯度共同决定了多离子体系在多孔介质中的扩散规律。

3 结 论

(1) 基于多组分混合物的组分线性动量平衡,提出可考虑土体带电性的活度系数,并引入电化学势梯度表达式,建立了适用于低渗透黏土衬垫层的一维多组分扩散模型。采用多物理场仿真软件 COMSOL 开展数值模拟求解,研究了土体带电性修正的组分活度对污染物浓度随时空分布规律的影响。

(2) 随着渗滤液中溶质初始浓度的增大,活度系数取值差异的影响越来越明显,即在渗滤液中溶质初始浓度较大的情况下,活度系数应该选为考虑黏土带电性修正的离子活度系数。

(3) 离子的扩散行为不仅由其扩散系数和土体孔隙率决定,而且是与离子、孔隙溶液和多孔介质自身特性密切相关的复杂函数。因此,针对实际工程中的堆场防渗垫层的设计而言,本文所建多离子体系在带电性黏土中的扩散模型能够为各类堆场设计合理经济的防渗隔污屏障提供理论依据。

参考文献:

- [1] 谢海建,严华祥,张春华,等.考虑固结、扩散和降解耦合作用下污染物大黏土中的运移解析模型[J].水利学报,2015,46(S1):124-128.
- [2] 郝风田,路影.海工环境混凝土中氯离子扩散敏感性分析[J].水利与建筑工程学报,2013,11(6):190-207.
- [3] 李仁民,刘松玉,缪林昌.黏土中多离子体系的扩散机理研究[J].岩土工程学报,2010,32(11):2-6.
- [4] 巨占莹.基于动量平衡的多离子体系在带电性黏土中的扩散模型[D].北京:北京工业大学,2017.
- [5] Du Yanjun, Liu Songyu, Hayashi Shigenori. Some factors controlling diffusive transport of potassium ion through clayey soils[J]. Journal of Southeast University: English Edition, 2006,22(1):106-111.
- [6] 席永慧,任杰,胡中雄.污染物离子在黏土介质中扩散系数的测定[J].同济大学学报,2003,31(5):595-599.
- [7] 陈云敏,谢海建,柯瀚,等.层状土中污染物的一维扩散解析解[J].岩土工程学报,2006,28(4):521-524.
- [8] 谢海建,唐晓武,陈云敏,等.原始土层影响下成层介质污染物一维扩散模型[J].浙江大学学报(工学版),2006,40(12):2191-2195.
- [9] Xie Haijian, Hywel Rhys Thomas, Chen Yunmin, et al. Diffusion of organic contaminants in triple-layer composite liners: an analytical modeling approach [J]. Acta Geotechnica, 2015,10(2):255-262.
- [10] 巨占莹,张志红.考虑组分活度的多组分污染物扩散模型[J].长江科学院院报,2018,35(8):67-71.
- [11] 张志红,陈杨,巨占莹,等.基于动量平衡的多离子体系扩散模型[J].水利与建筑工程学报,2018,16(5):87-91.
- [12] Rhue D. Coupled diffusion of exchangeable cations in soil [J]. Soil Science Society of America Journal, 1992,56(3):683-689.
- [13] 韩光泽,尚永,陈明东.外场作用下多组分质量传递 Maxwell-Stefan 方程及其应用:电场作用下球形颗粒中的扩散[J].化工学报,2012,63(2):416-423.
- [14] Rollea Massimo, Muniruzzaman Muhammad, Haberer Christina M, et al. Coulombic effects in advection-dominated transport of electrolytes in porous media: Multicomponent ionic dispersion [J]. Geochimica et Cosmochimica Acta, 2013,120:195-205.
- [15] Muniruzzamana Muhammad, Haberer Christina M., Grathwohl Peter, et al. Multicomponent ionic dispersion during transport of electrolytes in heterogeneous porous media: Experiments and model-based interpretation [J]. Geochimica et Cosmochimica Acta, 2014,141:656-659.
- [16] 朱敏.一维多组分溶质运移模型研究[D].北京:北京工业大学,2015.