

# 考虑预应力效应的曲梁面内振动特性研究

何文正<sup>1,2</sup>, 何 静<sup>3</sup>, 文竞舟<sup>4</sup>

(1. 重庆工商职业学院, 重庆 401520; 2. 重庆市建筑科学研究院, 重庆 400015;  
3. 重庆邮电大学 移通学院, 重庆 401520; 4. 云南省公路科学技术研究院, 云南 昆明 650051)

**摘 要:** 为了研究预应力对曲梁面内振动特性的影响, 以自由振动状态下的曲梁微段为研究对象, 考虑预应力对曲梁刚度的影响, 推导了曲梁的面内振动偏微分方程, 对方程进行求解并推求了简支曲梁面内振动一、二阶频率计算公式, 算例分析结果表明所提计算公式正确。

**关键词:** 曲梁; 振动特性; 微分方程; 轴向振动

**中图分类号:** U441.2

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1672-1144(2016)03-0102-05

## Vibration Characteristics of Curved Beams Considering Prestressed Effect

HE Wenzheng<sup>1,2</sup>, HE Jing<sup>3</sup>, WEN Jingzhou<sup>4</sup>

(1. College of Architecture Engineering, Chongqing 401520, China;

2. Chong Qing Research Institute of Building Science, Chongqing 400015, China;

3. College of Mobile Telecommunications Chongqing University of Posts and Telecom, Chongqing 401520, China;

4. Yunnan Science & Technology Research Institute of Highway, Kunming, Yunnan 650051, China)

**Abstract:** In order to study the influences of prestress on the vibration characteristics of curved beams, the differential equation of the vibration of the prestressed curved beam considering the influence of the prestress was derived by analyzing the micro section of curved beam under the condition of free vibration. Then the formula for the first and second order natural frequency vibration of a prestressed circular curved beam was deduced by solving the equation. Finally, the result of example analysis proves that the formula is correct.

**Keywords:** curved beam; vibration characteristics; differential equation; axial vibration

曲线梁桥的受力特性是一个复杂的空间问题, 很难准确地把握曲线梁桥的受力状态, 目前曲梁动力特性的研究成果相对于静力分析较少<sup>[1-2]</sup>, 在以往的研究中, 曲梁的动力特性研究基本上都没有考虑预加力的作用<sup>[3-7]</sup>, 也基本上没有提出广泛适用的计算公式, 目前在工程中曲梁固有频率的计算基本上采用有限单元法进行<sup>[8-11]</sup>。虽然在《公路桥涵设计通用规范》<sup>[12]</sup>(JTG D60-2004)给出的拱桥基频的计算方法可参照计算曲梁的面内振动基频, 但根据本文的验证, 计算出的基频与实际情况差异极大, 不能正确的反映曲梁面内的振动情况。

本文中采用达朗贝尔原理研究了曲梁振动微分方程, 并进一步考虑了预应力的影响, 推求了预应力圆弧曲梁(以下简称曲梁)一、二阶面内自振频率公

式, 并对公式的正确性进行了验证。

## 1 振动微分方程推导

### 1.1 基本假定

在进行曲梁振动微分方程的推导时, 做以下 3 项假定:

- (1) 曲梁为矩形匀质、等截面梁, 半径为常数  $R$ ;
- (2) 预加力为常量  $P$ , 作用在矩形截面形心;
- (3) 曲梁半径远大于截面尺寸, 忽略曲率的影响。

采用的坐标系为三维流动直角坐标系, 规定曲线圆心方向为  $x$  轴, 垂直于曲线所在平面向下为  $y$  轴; 截面形心轴切线方向为  $z$  轴, 坐标系正方向见图 1。

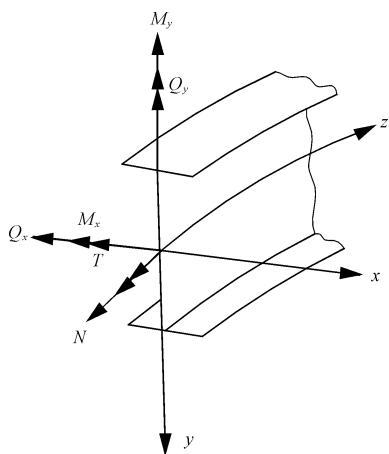


图1 三维流动直角坐标系

为了简化推导过程和降低求解难度,本文仅考虑直线布筋且力筋位于截面形心的情况,偏心和曲线布筋情况下的振动方程极为复杂,有待于进一步研究。由于轴向振动产生的振动变形较小,在推导过程中忽略轴向振动,以静力学的方式考虑,曲梁微段由预应力外荷载在横截面上仅产生的轴力为 $-P^{[13]}$ ,附加弯矩为零。

## 1.2 振动微分方程推导

在自由振动状态下,曲梁微段不受其他外力作用,截面内力见图2。利用空间力系维系平衡的6个条件可以得到6个方程。由其中3个方程可导出面内振动的内力平衡方程。

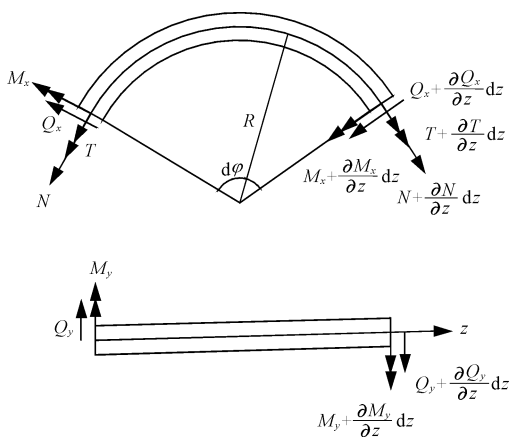


图2 微段截面内力图

由 $\sum F_x = 0$ 可得:

$$-Q_x \cos \frac{d\varphi}{2} + N \sin \frac{d\varphi}{2} + (Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial z} dz) \cos \frac{d\varphi}{2} + (N + \frac{\partial N}{\partial z} dz) \sin \frac{d\varphi}{2} - m(z) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

$m(z)$  为微段质量,由于 $\varphi$ 很小, $\cos \frac{d\varphi}{2} \approx 1$ , $\sin \frac{d\varphi}{2} \approx d\varphi$ ,且 $\frac{d\varphi}{dz} = \frac{1}{R}$ ,略去高阶微量并化简得:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial z} + \frac{N}{R} = m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2)$$

同理由 $\sum F_z = 0$ 、 $\sum M_y = 0$ 可列出其余2个方程并化简得:

$$\frac{\partial M_y}{\partial z} + Q_x + P \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial N}{\partial z} - \frac{Q_x}{R} = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4)$$

式中: $m$ 为曲梁单位长度的质量; $N$ 为轴力; $M_y$ 为横向弯矩; $R$ 为半径; $u$ 为纵向位移; $v$ 为径向位移。

将(3)式对 $z$ 求导并代入(2)式中,令 $N = -P$ ,可得到:

$$\frac{\partial^2 M_y}{\partial z^2} + \frac{P}{R} + P \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (5)$$

式(5)中仅存的内力项为面内弯矩 $M_y$ ,为了消去该内力项,还需代入几何、物理方程<sup>[14]</sup>,以建立截面内力与变形之间的关系。根据材料力学和胡克定律,可以建立面内横向弯矩 $M_y$ 与变形的关系<sup>[14]</sup>:

$$M_y = EI_y K_y = EI_y \left( \frac{d^2 v}{dz^2} + \frac{v}{R^2} \right) \quad (6)$$

式中: $E$ 为弹性模量; $I_y$ 为绕 $y$ 轴的抗弯惯矩; $K_y$ 为绕 $y$ 轴的变形曲率。

将力和变形之间的几何关系代入式(5)可得:

$$EI_y \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + \left( \frac{EI_y}{R^2} + P \right) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{P}{R} = -m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (7)$$

式(7)即为考虑预应力影响的曲梁面内振动微分方程。

当曲梁半径 $R \rightarrow \infty$ 时,式(7)退化为以下方程:

$$EI_y \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + P \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (8)$$

式(8)为考虑轴向力影响的直线梁的横向弯曲振动微分方程,说明在半径趋于无限大的时候曲梁振动方程退化为了直梁的振动方程。

式(7)反映曲梁面内振动,在忽略纵向振动的情况下,式中仅包含了径向位移 $v$ ,大大降低了方程求解的难度。同时面内振动微分方程中包含了预加力 $P$ ,说明预加力的存在将影响梁的振动特性。

## 2 方程求解

### 2.1 边界条件

考虑简支超静定曲梁的情况见图3,固定梁端扭转约束,其边界条件为:

$$v(0) = v(l) = 0, v''(0) = v''(l) = 0; \quad (9)$$

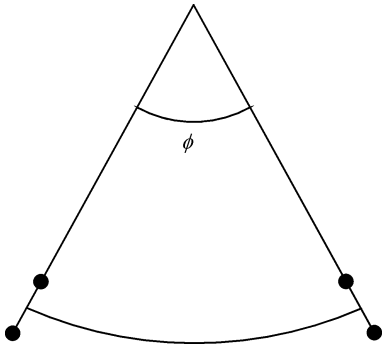


图 3 曲梁支承布置

## 2.2 方程求解

由式(7)可看出,适当的简化已经使方程式(7)解耦,式中仅含有径向位移  $z$ ,从而使方程求解难度大大降低;曲梁面内振动方程求解思路如下:

当  $P = 0$  时,即不考虑预应力作用的时候,式(7)是一个齐次线性偏微分方程,可以采用分离变量法求解,按照文献[15]可以求解方程并求出写出自振频率的表达式如下:

$$\omega = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI_y}{m}} \sqrt{\left(1 - \frac{EI_y l^2}{R^2 \pi^2 EI_y}\right)} \quad (10)$$

其中  $n$  为频率的阶数。

现在主要考虑当  $P \neq 0$  时的情况:当  $P \neq 0$  时式(7)为一个非齐次线性偏微分方程,可采用伽辽金方法求得近似解,求解过程如下:

构造横向振动的位移函数:

$$v(z, t) = \sum_{r=1}^n \varphi_r(z) q_r(t) \quad (11)$$

其中  $\varphi_r(z)$  为形状函数。

将式(11)代入式(7)并在区间  $(0 \leq x \leq l)$  进行加权积分得:

$$\int_0^l \left[ m \sum_{r=1}^n \varphi_r(z) \ddot{q}(t) + EI_y \sum_{r=1}^n \varphi_r^{(4)}(z) q(t) + \left( P + \frac{EI_y}{R^2} \right) \sum_{r=1}^n \varphi_r^{(2)}(z) q(t) + \frac{P}{R} \right] \varphi_r(z) dx = 0, r = 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

本文拟求一阶和二阶频率,形状函数  $\varphi_r(z)$  取简支梁的一阶、二阶振型函数  $\varphi_1(z) = \sin(\frac{\pi z}{l})$  和  $\varphi_2(z) = \sin(\frac{2\pi z}{l})$ ,分别将其代入式(12),化简得到式(13)和式(14):

$$\int_0^l \left[ m \ddot{q}(t) \sin(\frac{\pi z}{l}) + \left( EI_y \frac{\pi^4}{l^4} - \left( P + \frac{EI_y}{R^2} \right) \frac{\pi^2}{l^2} \right) q(t) \sin(\frac{\pi z}{l}) + \frac{P}{R} \right] \sin(\frac{\pi z}{l}) dz = 0 \quad (13)$$

$$\int_0^l \left[ m \ddot{q}(t) \sin(\frac{2\pi z}{l}) + \left( EI_y \frac{16\pi^4}{l^4} - \left( P + \frac{EI_y}{R^2} \right) \frac{4\pi^2}{l^2} \right) q(t) \sin(\frac{2\pi z}{l}) + \frac{P}{R} \right] \sin(\frac{2\pi z}{l}) dz = 0 \quad (14)$$

分别对式(13)和式(14)进行积分运算可得式(15)和式(16):

$$\ddot{q}(t) + \omega_1^2 q(t) + \frac{4P}{m\pi R} = 0 \quad (15)$$

$$\ddot{q}(t) + \omega_2^2 q(t) = 0 \quad (16)$$

式(15)为无阻尼单自由度系统在恒力作用下的受迫振动方程,体系自振圆频率公式为:

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI_y}{m}} \sqrt{\left(1 - \frac{\left(P + \frac{EI_y}{R^2}\right) l^2}{\pi^2 EI_y}\right)} \quad (17)$$

式(16)为无阻尼单自由度系统自由振动方程,体系自振圆频率公式为:

$$\omega_2 = \frac{4\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI_y}{m}} \sqrt{\left(1 - \frac{\left(P + \frac{EI_y}{R^2}\right) l^2}{4\pi^2 EI_y}\right)} \quad (18)$$

式(17)和式(18)为简支曲梁面内振动的一、二阶自振频率公式,当曲梁半径  $R \rightarrow \infty$  时,公式即退化为式(19)和式(20):

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI_y}{m}} \sqrt{\left(1 - \frac{Pl^2}{\pi^2 EI_y}\right)} \quad (19)$$

$$\omega_2 = \frac{4\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI_y}{m}} \sqrt{\left(1 - \frac{Pl^2}{4\pi^2 EI_y}\right)} \quad (20)$$

式(19)和式(20)为考虑轴力影响的直梁一、二阶自振频率<sup>[15]</sup>公式。由此可知当曲梁半径  $R \rightarrow \infty$  时,曲梁自振频率公式即退化直梁自振频率计算公式。当  $P = 0$  时,式(17)、式(18)式则退化为式(10),与分离变量法求解结果吻合。

分析式(17)和式(18)可以得出:

(1) 曲梁一阶和二阶面内振动频率除了与梁体质量、刚度分布情况有关以外,还与半径和预应力的有关。

(2) 计算公式表明预应力将影响曲梁的刚度,预应力越大,曲梁的自振频率越低。

(3) 由于预应力荷载一般远小于临界荷载,预应力对自振频率的影响较小;同时对于简支曲梁,半径一般远大于梁长,半径对自振频率的影响也较小。

## 3 数值验证

建立曲梁数值计算模型,梁截面为矩形,梁高 0.9 m,宽 0.3 m,梁长 20 m;梁体弹模  $E = 3.5 \times 10^4$  MPa,  $\rho = 2\,500$  kg/m<sup>3</sup>,预应力筋弹模  $E = 2.1 \times 10^5$

MPa,曲梁半径分别取 60 m、100 m、200 m、和 10 000 m,用降温法模拟预加力。

分别采用本文导出的一阶和二阶频率近似计算公式和有限元程序计算曲梁面内一、二阶自振频率<sup>[16]</sup>;曲梁一阶面内振型为正对称弯曲,二阶面内振型为反对称弯曲,振型图见图 4 和图 5。此外,有文献认为曲梁面内的振动计算和拱桥的振动一致,可参照拱桥计算,而在《公路桥涵设计通用规范》<sup>[12]</sup>

(JTG D60 – 2004)给出了拱桥一阶频率的计算方式,即:

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EI_c}{m_c}}$$

(21)

其中  $\omega_1 = 105 \times \frac{5.4 + 50f^2}{16.4 + 334f^2 + 1867f^4}$ ,此处将 3 者计算结果进行比较,表 1 ~ 表 3 为预加力  $P$  分别为 0 kN、10 kN、20 kN 时的自振频率大小。

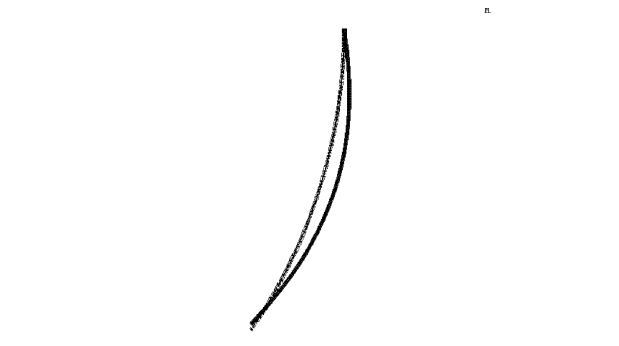


图 4 曲梁一阶振型

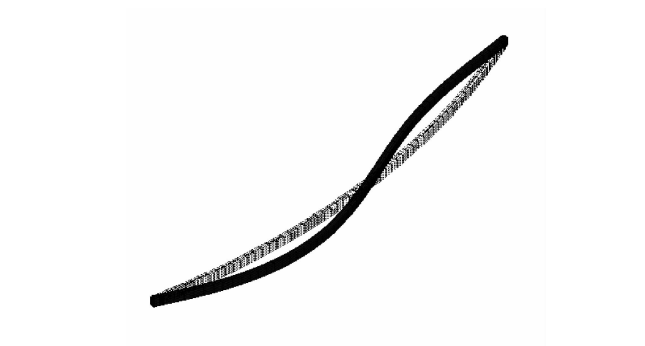


图 5 曲梁二阶振型

表 1  $P = 0$  kN 时曲梁自振频率计算结果比较

| $R$   | 一阶自振频率/Hz |         | 与有限元模型的相对误差 1/% | 二阶自振频率/Hz |        |         | 与有限元模型的相对误差 2/% |
|-------|-----------|---------|-----------------|-----------|--------|---------|-----------------|
|       | 本文公式一阶    | 有限元模型一阶 |                 | 拱桥频率公式    | 本文公式二阶 | 有限元模型二阶 |                 |
| 60    | 0.5583    | 0.5889  | - 5.48          | 1.9322    | 2.2550 | 2.2364  | 0.82            |
| 100   | 0.5630    | 0.5756  | - 2.23          | 1.9594    | 2.2596 | 2.2510  | 0.38            |
| 200   | 0.5649    | 0.5706  | - 1.01          | 1.9711    | 2.2616 | 2.2569  | 0.21            |
| 10000 | 0.5656    | 0.5695  | - 0.69          | 1.9751    | 2.2622 | 2.2568  | 0.24            |

表 2  $P = 10$  kN 时曲梁自振频率计算结果比较

| $R$   | 一阶自振频率/Hz |         | 与有限元模型的相对误差 1/% | 二阶自振频率/Hz |        |         | 与有限元模型的相对误差 2/% |
|-------|-----------|---------|-----------------|-----------|--------|---------|-----------------|
|       | 本文公式一阶    | 有限元模型一阶 |                 | 拱桥频率公式    | 本文公式二阶 | 有限元模型二阶 |                 |
| 60    | 0.5546    | 0.5890  | - 6.20          | 1.9322    | 2.2514 | 2.2365  | 0.66            |
| 100   | 0.5593    | 0.5756  | - 2.91          | 1.9594    | 2.2560 | 2.2511  | 0.22            |
| 200   | 0.5613    | 0.5707  | - 1.67          | 1.9711    | 2.2579 | 2.2570  | 0.04            |
| 10000 | 0.5619    | 0.5696  | - 1.36          | 1.9751    | 2.2586 | 2.2570  | 0.07            |

表 3  $P = 20$  kN 时曲梁自振频率计算结果比较

| $R$   | 一阶自振频率/Hz |         | 与有限元模型的相对误差 1/% | 二阶自振频率/Hz |        |         | 与有限元模型的相对误差 2/% |
|-------|-----------|---------|-----------------|-----------|--------|---------|-----------------|
|       | 本文公式一阶    | 有限元模型一阶 |                 | 拱桥频率公式    | 本文公式二阶 | 有限元模型二阶 |                 |
| 60    | 0.5509    | 0.5890  | - 6.92          | 1.9322    | 2.2477 | 2.2367  | 0.49            |
| 100   | 0.5556    | 0.5757  | - 3.62          | 1.9594    | 2.2523 | 2.2513  | 0.04            |
| 200   | 0.5576    | 0.5708  | - 2.36          | 1.9711    | 2.2543 | 2.2572  | - 0.13          |
| 10000 | 0.5582    | 0.5696  | - 2.04          | 1.9751    | 2.2549 | 2.2571  | - 0.10          |

由计算结果可以看出:  
(1) 本文导出的预应力曲梁面内一、二阶频率计算公式与有限元分析结果相比较为接近,一阶频

率最大误差为 6.92%;二阶频率最大误差为0.82%,二阶频率的计算精度明显高于一阶频率;总体而言半径越大其误差越小。

(2) 根据本文的近似公式计算,一阶频率随着半径增加而增加,与有限元计算结果趋势不一致,但是数值总体相差不大,二阶频率变化趋势与有限元计算结果一致;而公式中预应力对一阶和二阶自振频率的影响都较小,随着预应力的增加,频率减小的幅度小于 1%。

(3) 按照拱桥的一阶频率公式计算曲梁的振动频率与本文的结果和有限元计算结果相差极大,不宜按此公式计算的曲梁的面内振动频率。

# 4 结 论

(1) 用数学物理方法推导了考虑预应力效应的曲梁面内振动微分方程,分析了曲梁面内振动特性,求解方程得出了曲梁面内振动一、二阶频率近似计算公式,数值分析结果与公式计算结果吻合,证明了方程的推导及求解的正确性。本文导出的公式具有一定的实用性,可用于曲梁低阶自振频率的近似计算。

(2) 而按照《公路桥涵设计通用规范》<sup>[12]</sup>(JTG D60-2004)规范拱桥的一阶频率公式计算曲梁的面内振动频率与有限元计算结果差异极大,不适于计算曲梁面内的振动频率。

## 参考文献:

- [1] 赵跃宇,康厚军,冯 锐,等.曲线梁研究进展[J].力学进展,2006,36(2):170-186.
- [2] 吕 伟.单轴对称工形曲梁稳定承载力计算公式[J].水利与建筑工程学报,2012,10(4):92-95.
- [3] Chai Hong Yoo, Fehrenbach J P. Natural frequency of curved girder[J]. Journal of the Engineering Mechanics Division,

1981,107(2):337-354.

- [4] Kou C H, Bentley S E, Huang J Y, et al. Free vibration analysis of curved thin-walled girder bridges[J]. Journal of Structural Engineering, 1992,118(10):2890-2910.
- [5] 单德山.高速铁路曲线梁桥车桥耦合振动分析及大跨度曲线梁桥设计研究[D].成都:西南交通大学博士学位论文,1999:24-46.
- [6] Yang Y B, Wu C M, Yau J D. Dynamic response of a horizontally curved beam subjected to vertical and horizontal moving loads[J]. Journal of Sound and Vibration, 2001,242(3):519-537.
- [7] 宋郁民,吴定俊.铁路曲线桥梁的动力特性和车致振动分析[J].水利与建筑工程学报,2011,9(3):58-61.
- [8] 王阳春,徐秀丽,李雪红,等.小半径匝道曲线梁桥地震响应分析[J].世界地震工程,2014,30(1):154-159.
- [9] 段海娟,赵人达.薄壁曲线箱梁空间分析的梁段单元[J].土木工程学报,2004,37(12):1-5.
- [10] 张罗溪.曲梁结构矩阵分析[J].铁道学报,1993,15(1):80-86.
- [11] 左自贵,高芳清.小半径弯梁桥地震反应分析[J].四川大学学报,2010,42(S2):37-39.
- [12] 中华人民共和国交通部.公路桥涵设计通用规范:JTG D60-2004[S].北京:人民交通出版社,2004.
- [13] 邵容光,夏 淦.混凝土弯梁桥[M].北京:人民交通出版社,1996:212-216.
- [14] 姚玲森.曲线梁[M].北京:人民交通出版社,1989.
- [15] 刘晶波,杜修力.结构动力学[M].北京:机械工业出版社,2005:160-169.
- [16] 高 杰,黄 颖.既有预应力结构现存预应力数学模型研究[J].水利与建筑工程学报,2015,13(6):183-187.



(上接第 24 页)

- [4] 王 成,丁 敏,李晓红.季节性冻土隧道的温度场与应力场耦合数值分析[J].水利与建筑工程学报,2010,8(4):115-118.
- [5] 张玉芝,杜彦良,孙宝臣,等.季节性冻土地区高速铁路路基冻融变化规律研究[J].岩石力学与工程学报,2014,33(12):2546-2553.
- [6] 张世民.青藏铁路多年冻土路基热-力稳定性数值仿真分析[J].土木建筑与环境工程,2012,34(S1):82-87.
- [7] 孙 文,吴亚平,蔺鹏臻,等.次生不良冻土对路基稳定性影响的数值分析[J].铁道工程学报,2013(11):7-12.
- [8] 易 鑫,喻文兵,陈 琳,等.边界条件对多年冻土路基热稳定性的影响分析[J].冰川冻土,2014,36(2):369-375.
- [9] 柳 波.多年冻土地区公路路基不稳定变形研究[D].

西安:长安大学,2015.

- [10] 何 敏,李 宁,刘乃飞.饱和冻土水热力耦合模型解析及验证[J].岩石工程学报,2012,34(10):1858-1865.
- [11] 隗新宇.多年冻土区青藏公路楚玛尔河段路基沉降研究[D].北京:北京交通大学,2015.
- [12] 毛雪松,李 宁,王秉纲,等.多年冻土路基水-热-力耦合理论模型及数值模拟[J].长安大学学报(自然科学版),2006,26(4):16-19.
- [13] 黄厚诚,王秋良.热传导问题的有限元分析[M].北京:科学出版社,2011.
- [14] 吴吉春,于 晖,李金平,等.祁连山中东部的冻土特征(Ⅱ)[J].冰川冻土,2007,29(3):426-431.
- [15] 徐敦祖,王家澄,张立新.冻土物理学[M].北京:科学出版社,2010.