

特大型桥梁投影面的选择方法研究

孟 敏¹, 王栋明², 田 建¹

(1. 河海大学 测绘科学与工程系, 江苏 南京 210098; 2. 浙江省机电设计研究院有限公司, 浙江 杭州 310002)

摘 要: 桥梁施工建设时控制网投影面选取关系到全桥施工的定位精度, 针对特大型桥梁线路长、施工精度要求高、投影不可避免存在变形等特点, 提出利用任意投影带的高斯正形投影, 对桥梁的各部分按照结构重要性划分投影变形权重, 求出使得全桥 GPS 控制网长度综合变形最小的、符合施工精度要求的、全桥统一的最优抵偿投影面。

关键词: 投影变形; 权重划分; 最优抵偿投影面; 精度分析

中图分类号: U445

文献标识码: A

文章编号: 1672—1144(2012)03—0061—04

Research on Selection Method for Projective Plane of Extra Large Bridge

MENG Min¹, WANG Dong-ming², TIAN Jian¹

(1. Department of Surveying Science and Engineering, Hohai University, Nanjing, Jiangsu 210098, China;

2. Zhejiang Province Mechanical & Electrical Engineering Design Institute Co., Ltd., Hangzhou, Zhejiang 310002, China)

Abstract: The selection of construction control network's projective plane has relation to the positioning accuracy when bridges are constructed. According to the characteristics of extra large bridges such as long lines, high construction precision and unavoidable distortion of projection, the method is put forward here which would use the Gaussian orthogonal projection of any projection belt and divide the distortion weight of projection according to the importance of structure in order to obtain the projective plane which could make the comprehensive deformation of the whole bridge's control network smallest. This method could not only meet the requirements of construction accuracy, but also make the whole bridge's projective plane unified and optimized.

Keywords: distortion of projection; weight division; optimal counter action projection plane; precision analysis

随着我国交通建设不断发展, 特大型桥梁工程越来越多的建在河流上, 作为特大型精密工程, 桥梁施工精度要求很高, 如何合理、精确地计算全桥控制网的数据是保证特大型桥梁工程质量的关键。GPS 控制网的测设工作是桥梁施工前的首要工作, 进而需要将 GPS 基线网投影变换为工程独立施工控制网^[1]。

为便于工程使用, 要求由转换的控制点坐标反算的边长与实地量得的边长, 在长度上应该相等, 即由归算投影改正而带来的变形或改正数, 不得大于工程各阶段的精度要求。当边长的归算投影改正不能满足精度要求时, 为保证测量结果的直接利用和计算的方便, 可采用任意带抵偿投影面高斯正形投影, 或尺度强制约束等变换方式限制边长投影变形。

本文针对桥梁各部分的施工精度要求、平均施工面高程、线路长度的不同, 研究一个使得满足全桥投影变形最小的任意带抵偿投影面, 力争选取合适的投影参数, 使得 GPS 网在高斯平面上的边长尺度能与地面网坐标系中应有的边长尺度相一致^[2]。

1 抵偿投影的基本理论

将地面实测距离归算到参考椭球面上的变形影响为:

$$\Delta s_1 = -\frac{H_m}{R}s \quad (1)$$

式中: H_m 为地面点边长线高出参考椭球面的平均高程; s 为地面点间的实测距离; R 为归算边方向参考椭球法截弧的曲率半径。

将椭圆面上的长度为 S 大地线归算到高斯投影面上,变形长度为 Δd ,

$$\Delta d = \frac{y_m^2}{2R_m^2} S \quad (2)$$

式中: $S = s + \Delta s_1$, y_m 表示大地线投影后始末两模拟点横坐标平均值; R_m 表示大地线始末两端点的平均纬度计算的椭球的平均曲率半径。

更加精确的投影公式为^[3]:

$$\Delta d = \frac{y_m^2}{2R_m^2} S + \frac{\Delta Y^2}{24R_m^2} S \quad (3)$$

式中: ΔY 表示两端点近似横坐标之差。

工程中选择投影带的原则是使得投影产生的变形较观测值而言,变化最小。不同投影带的出现是因为选择的中央子午线不同,如果合理选择中央子午线的位置,使得该投影带所产生的两端点的长度变形恰好抵偿这两点投影到椭圆面上产生的长度变形,则在高斯平面上,这两点的长度能够和实际长度保持一致,避免长度变形,称这种能够抵偿长度变形的投影带为“抵偿投影带”^[4-5]。

由式(1)和(2)可知,边长投影的综合变形 ΔS 为:

$$\Delta S = \Delta d + \Delta s_1 = \frac{S}{2R^2} (y_m^2 - 2RH) \quad (4)$$

式中: R 与 R_m 大致相等,在几十公里的投影范围内,可保持 R 不变。 H 为归算边高出抵偿投影面的平均高程,则抵偿投影面的高程为 $H_m - H$ 。

2 桥梁最优投影面的选取

特大型桥梁一般呈线性^[6],包括主桥、引桥和接线工程,全长可达 30 km。如图 1 所示, y_1 表示北接线的起点, y_2 表示北引桥的起点, y_3 表示主桥的横坐标(主桥轴线平行于子午线), y_4 为南引桥终点坐标, y_5 为南接线终点坐标。

设桥梁北接线工程的平均高程为 H_1 , 长度为 S_1 ; 北引桥工程的平均高程为 H_2 , 长度为 S_2 ; 主桥桥面的平均高程为 H_3 , 长度为 S_3 , 南引桥工程的平均高程为 H_4 , 长度为 S_4 , 南接线工程的平均高程为 H_5 , 长度为 S_5 (其中, H_1 至 H_5 均为地面点高出参考椭圆面的高程)。

投影时需遵循两个原则:

- (1) 主桥的桥面平均变形为 0;
- (2) 全桥的投影变形最小。

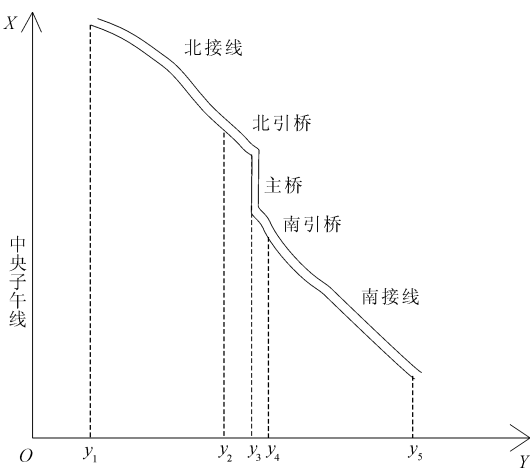


图 1 桥梁线路图

依照这两个原则,又因为主桥轴线平行于子午线,所以:

$$\Delta S_{\text{主桥}} = \frac{S_3}{2R^2} [(y_0 - y_3)^2 - 2R(H_3 - H)] = 0 \quad (5)$$

$$H = H_3 - \frac{(y_0 - y_3)^2}{2R} \quad (6)$$

式中: H 表示未加高程异常改正的抵偿投影面的高程。

根据公式(3)可以看出,高斯投影变形实际上是一个以距离中央子午线距离为自变量的二次曲线。为了尽可能减小全桥边长的综合变形,需要采用一定的算法求出最优的中央子午线位置 y_0 。

设接线工程对投影变形的精度要求权为 P_1 , 引桥工程对投影变形的精度要求权为 P_2 , 主桥工程对投影变形的精度要求权为 P_3 , 因为已经保证了主桥投影变形为 0, 所以在计算综合变形时可以不予考虑。为了求定中央子午线的位置 y_0 , 在线路区间 $[y_1, y_6]$ 上对变量 y 进行积分, 其中 $y_0 \in [y_1, y_6]$ 。

将一条长度为 S 的线路在区间 $y \in [y_1 - y_0, y_2 - y_0]$ 上分成 n 段, 每段长为 $\frac{y_2 - y_1}{n}$, 对于一段微小的距离区间 $[y, y + \Delta y]$, 其高斯投影变形 Δs_i 为:

$$\Delta s_i = s_i \left[\frac{(y + \frac{\Delta y}{2})^2}{2R^2} + \frac{(y_2 - y_1)^2}{24R^2} \right] \quad (7)$$

则每段投影变形值可近似为:

$$\Delta S_i = \frac{S}{n} \left(\frac{y_i^2}{2R^2} + \frac{(y_2 - y_1)^2}{24R^2} \right) - \frac{(H_1 - H)}{R} \frac{S}{n} \quad (8)$$

因为 x 方向上的变形不考虑, 可以近似的用 dy 的变化来反映 ds 的变化, 则在一整条线段上, n 段总的投影变形公式经过整合为:

$$(1) \quad \Delta S_{\text{北接线}} = \int_{y_1 - y_0}^{y_2 - y_0} S_1 \left(\frac{y^2}{2R^2} + \frac{(y_2 - y_1)^2}{24R^2} \right) dy -$$

$$\frac{(H_1 - H)}{R}S_1$$

(9)

$$(2) \quad \Delta S_{\text{北引桥}} = \int_{y_2-y_0}^{y_3-y_0} S_2(\frac{y^2}{2R^2} + \frac{(y_3 - y_2)^2}{24R^2})dy - \frac{(H_2 - H)}{R}S_2$$

(10)

$$(3) \quad \Delta S_{\text{南引桥}} = \int_{y_3-y_0}^{y_4-y_0} S_4(\frac{y^2}{2R^2} + \frac{(y_4 - y_3)^2}{24R^2})dy - \frac{(H_4 - H)}{R}S_4$$

(11)

$$(4) \quad \Delta S_{\text{南接线}} = \int_{y_4-y_0}^{y_5-y_0} S_5(\frac{y^2}{2R^2} + \frac{(y_5 - y_4)^2}{24R^2})dy - \frac{(H_5 - H)}{R}S_5$$

(12)

(5) $\Delta S_{\text{主桥}} = 0$

(13)

对式(9) 进行积分计算:设 $\Delta Y_{ij} = y_j - y_i$,则:

$$\Delta S_{\text{北接线}} = \frac{S_1}{24R^2} \cdot [5\Delta Y_{12}^3 + 12\Delta Y_{12}(y_1 - y_0)(y_2 - y_0) - 24R(H_1 - H)]$$

(14)

(10) 到(12) 式依次类推,考虑各段所占的权重,则总的投影变形为:

$$\sum \Delta S_{\text{总}} = P_1(\Delta S_{\text{北接线}} + \Delta S_{\text{南接线}}) + P_2(\Delta S_{\text{北引桥}} + \Delta S_{\text{南引桥}}) + P_3 \cdot \Delta S_{\text{主桥}}$$

(15)

结合公式(6) 和(14),问题就变成有两个未知数,两个方程,求函数的最小值,其中 $y_0 \in [y_1, y_5]$,最后的总函数公式为:

$$\sum \Delta S_{\text{总}} = aP_1[b_1 + 12t_{12}S_1 + 12t_{45}S_5] + aP_2[b_2 + 12t_{23}S_2 + 12t_{34}S_4] - \frac{1}{R}[P_1(H_1 - H)(S_1 + S_5) + P_2(H_2 - H)(S_2 + S_4)]$$

(16)

其中: $a = \frac{1}{24R^2}$, $b_1 = 5(S_1\Delta Y_{12}^3 + S_5\Delta Y_{45}^3)$,

$$t_{ij} = \Delta Y_{ij}(y_j - y_0)(y_i - y_0)$$

$$H = H_3 - \frac{(y_0 - y_3)^2}{2R}$$

在上面的公式中,将 H 改写成 y_0 的一元二次函数形式:

$$\sum \Delta S_{\text{总}} = 3a \cdot [4P_1S_1\Delta Y_{12} + 4P_1S_5\Delta Y_{45} + 4P_2S_2\Delta Y_{23} + 4P_2S_4\Delta Y_{34} - 4P_1(S_1 + S_5) - 4P_2(S_2 + S_4)]y_0^2 - 3a \cdot [4P_1S_1\Delta Y_{12}^2 + 4P_1S_5\Delta Y_{45}^2 + 4P_2S_2\Delta Y_{23}^2 + 4P_2S_4\Delta Y_{34}^2 - 8P_1(S_1 + S_5)y_3 - 8P_2(S_2 + S_4)y_3]y_0 + a\{P_1b_1 + P_2b_2 + 12S_1P_1\Delta Y_{12} + 12S_5P_1\Delta Y_{45} + 12S_2P_2\Delta Y_{23} + 12S_4P_2\Delta Y_{34} + 24R[P_1(S_1 + S_5)(H_1 - H_3 + \frac{y_3^2}{2R}) + P_2(S_2 + S_4)(H_2 - H_3 + \frac{y_3^2}{2R})]\}$$

(17)

其中: $\Delta Y_{ij} = \Delta Y_{ij}y_iy_j$, $\Delta Y_{ij}^2 = y_j^2 - y_i^2$ 。
对于(17) 式,需要分成 6 种函数模型图进行讨论,如图 2 所示:

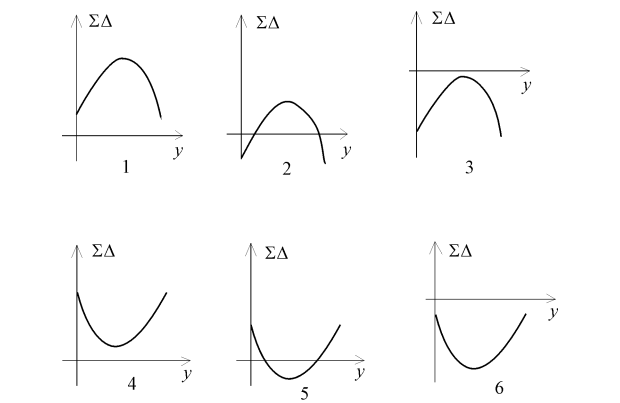


图 2 投影差的 6 种函数模型图

y_0 应该为误差最小值($|\sum \Delta S_{\text{总}}| = \min$) 所对应的位置。

这样,就求出了投影中央子午线 y_0 的位置和未加高程异常改正抵偿投影面的高程 H 的位置。又因为测区高程计算一般采用经过似大地水准面精化后的高程进行统一的高程计算,因而,需要将求出的大地水准面高程转化到似大地水准面上^[7]。

最终的相对似大地水准面的抵偿投影面的高程 $H_{\text{似投影}}$,

$$H_{\text{似投影}} = H - \zeta_{\text{异常}}$$

(18)

其中, $\zeta_{\text{异常}}$ 为高程异常值,为似大地水准面到参考椭球面的距离。

3 实例分析

某桥梁工程全线 GPS 测量控制网等级为 D 级,主桥 GPS 测量控制网等级为 B 级,线路分布情况如图 1 所示,全长 28.996 km,本地区的平均高程异常为 56.6 m。具体情况见表 1。

表 1 桥梁线路信息表

名称	长度/km	平均高程/m	起点~终点 y 坐标/km	精度权
北接线	12.0	18	0.0~6.5	1
北引桥	1.6	40	6.5~7.6	4
主桥	2.3	62	7.6~7.6	10
南引桥	1.6	40	7.6~8.3	4
南接线	11.6	18	8.3~15.2	1

则依照公式(6)、公式(17) 和公式(18),可以求出 y_0 的系数关系式为:

$$\sum \Delta S_{\text{总}} = 1597.2y_0^2 - 6203.1y_0 - 12229.2$$

(19)

符合图 2 中第 5 个函数模型,要使得 $\left| \sum \Delta S_{\text{总}} \right| = 0$, y_0 位置为 5.3223 km,则依据公式 (6),可以求出 H 为 61.4 m。

最终抵偿投影面高程为:
 $H_{\text{似投影}} = H - \zeta_{\text{异常}} = 61.4\text{m} - 56.6\text{m} = 5.8\text{m}$
表 2 为利用本方法求解的桥梁全线 GPS 变长变形与文献[3]的方法进行比较的结果。

表 2 观测结果分析表

线路名	实测边长/m	文献[3]/m	$\Delta s/\text{mm}$	本文/m	$\Delta s/\text{mm}$
NF01 - NF02	1508.3347	1508.3412	6.5	1508.3394	4.7
NF05 - NF06	2105.3425	2105.3391	-3.4	2105.3422	-0.3
NF15 - NF16	1354.5142	1354.5201	5.9	1354.5105	-3.7
NF18 - NF19	1118.2983	1118.3083	10.0	1118.3039	5.6
NF24 - NF25	995.3565	995.3690	12.5	995.3672	10.7

4 结 语

本文提出了对线路工程分段分权进行处理的方法。

(1) 减小了因为将全部测区使用一个平均高程来计算而造成的误差;

(2) 根据工程各部位施工精度的要求不同,提出线路分权处理的方法,使得各部分投影变形都能满足精度要求,并保证了主桥桥面投影无变形;

(3) 保证了全桥总的投影变形和为 0,但在线路的两端仍然存在一定量的投影变形;

(4) 如果将桥梁划分成几个部分单独进行控制网投影,固然精度更高,但对于全桥而言,坐标转换,施工对接过于复杂,而本方法可以在精度允许范围内,形成全桥的统一投影基准。

参考文献:

[1] 王志武,郑永海. GPS 在城市区域控制测量中的应用[J].水利与建筑工程学报,2010,8(1):120-121,150.
[2] 孔祥元,郭际明,刘宗泉.大地测量学基础[M].武汉大学出版社,2006:1.
[3] 范一中,王继刚.抵偿投影面的最佳选取问题[J].测绘通报,2000,(2):20-21.
[4] 李祖锋,高建军,缪志选,等.利用最优抵偿投影面算法限制 GPS 边长投影变形[J].测绘工程,2010,19(1):75-77.
[5] 陈顺宝,任建春,元 月.抵偿任意带高斯投影平面坐标系选择的研究[J].测绘通报,2005,(7):21-23,31.
[6] 黄 劲.高速公路常规桥梁设计方案探讨[J].路基工程,2010,(4):260-261.
[7] 陈达玉,譙 勇,刘 俊,等.似大地水准面精化方法研究与精度分析[J].铁道勘察,2011,37(3):21-23.